Esame di ALGEBRA 2 - 21 settembre 2010

Esercizio 1. (a) Si enunci il teorema di Cayley per i gruppi.
(b) Si dimostri il teorema di Cayley per i gruppi.

Esercizio 2. (a) Si dica se il gruppo additivo dei numeri reali è isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri reali positivi, giustificando la risposta.
(b) Si dica se il gruppo additivo dei numeri razionali è isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri razionali positivi, giustificando la risposta.

Esercizio 3. Si consideri un'azione $*\colon G\times X \to X$ di un gruppo G su un insieme X.
(a) Si dica cosa si intende per *orbita* di un elemento $x \in X$.
(b) Si dica cosa si intende per *stabilizzatore* St_x di un elemento $x \in X$.
Sia $G = \mathbb{R}_{>0}$ il gruppo moltiplicativo dei reali positivi, e $X = \mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, di modo che G agisce su X mediante la moltiplicazione tra numeri reali. In questo caso:
(c) Quali e quante sono le orbite?
(d) Si descrivano St_1 e St_0.

Esercizio 4. Siano $q < p$ due primi, ed $m \geq 0$ un numero intero. Sia G un gruppo di ordine qp^m.
(a) Si determini il numero di p-sottogruppi di Sylow di G e si provi che G contiene un p-sottogruppo di Sylow P che è normale in G.
(b) Si provi che ogni q-sottogruppo di Sylow di G è ciclico.
Sia Q un q-sottogruppo di Sylow di G.
(c) Si dimostri che PQ, insieme dei prodotti xy con $x \in P$ e $y \in Q$, è un sottogruppo di G.
(d) Si provi che G è il prodotto semidiretto di P e Q.
(e) Il gruppo G è il prodotto diretto di P e Q? (Si consideri ad esempio il gruppo S_3.)

Esercizio 5. Sia $u \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $g = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
(a) Si determini il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.
(b) Si verifichi che $u^2 - 2$ è una radice di g.
(c) Si dimostri che $\mathbb{Q}(u)$ è un campo di spezzamento di g su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6. (Per coloro che devono registrare un credito in più)
Sia $R = \mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ il prodotto cartesiano dell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. L'insieme R è un anello commutativo con identità rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$ definite da

$$(z, q) + (z', q') = (z + z', q + q') \quad \text{e} \quad (z, q)(z', q') = (zz', zq' + z'q)$$

per ogni $z \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q}$. Sia I il sottoinsieme $\{0\} \times \mathbb{Q} = \{\, (z, q) \in R \mid z = 0 \,\}$ di R.
(a) Si calcoli la caratteristica di R.
(b) Si dimostri che I è un ideale di R.
(c) Si dimostri che $R/I \cong \mathbb{Z}$.
(d) Si dimostri che se (x^2) denota l'ideale principale generato da x^2 nell'anello $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomi a coefficienti razionali, allora R è isomorfo ad un sottoanello di $\mathbb{Q}[x]/(x^2)$.

Ai precedenti quesiti va data una risposta, GIUSTIFICANDO la risposta stessa.