ESERCIZI DI ALGEBRA 2

19 OTTOBRE

Esercizio 1 Sia $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali. Sia

$$G = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\};$$

si verifichi che G è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di G:

$$H = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}; K = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}\}; L = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Si dica, giustificando la risposta, quali di questi sono sottogruppi di G, e quali sono sottogruppi normali di G.

Esercizio 2 Sia R l'anello $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, dove p è un primo. Sia G il gruppo

$$\{ \begin{pmatrix} 1 + pa & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in R\}$$

come sottogruppo del gruppo degli invertibili dell'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in R.

- Si scriva esplicitamente l'inverso di un elemento generico di G.
- Qual'è l'ordine di G?
- Si provi che il sottoinsieme

  $$H = \{ \begin{pmatrix} 1 + pb & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in R\}$$

  è un sottogruppo di G.
- H è ciclico? H è normale in G?

Esercizio 3 Sia $G = U(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

- Qual'è l'ordine del gruppo G?
- Si verifichi che $6 + 25\mathbb{Z}$ e $7 + 25\mathbb{Z}$ appartengono a G e se ne determinino i periodi.
- E' vero che G è un gruppo ciclico?

Esercizio 4 Si consideri il gruppo $G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0\}$ con la moltiplicazione righe per colonne.

- Si dimostri che $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0\}$ è un sottogruppo normale di G.
- Si provi che G/N è isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$ dei reali non nulli.
- Si considerino gli elementi $u = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. E' vero che $Nu = Nv$ nel gruppo quoziente G/N?
- Si verifichi che il sottogruppo $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ è un sottogruppo normale di G.

Esercizio 5 Nel gruppo simmetrico $\mathcal{S}_{10}$ si considerino le permutazioni

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

e il sottoinsieme $G = \{\sigma \in \mathcal{S}_{10} \mid \sigma(i) \leq 6 \text{ per ogni } 1 \leq i \leq 6\}$.

- Si verifichi che G è sottogruppo di $\mathcal{S}_{10}$.
- Si scrivano α e β come prodotti di cicli disgiunti.
- E' vero che i laterali destri $G\alpha$ e $G\beta$ coincidono?
- Provare che l'ordine di σ è minore o uguale a 20 per ogni $\sigma \in G$.

Esercizio 6 Sia G il gruppo delle funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ del tipo

$$\begin{array}{cccc} f_{a,b}: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax + b \end{array}$$

con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Siano $T = \{f_{a,b} \in G \mid a = 1\}$ e $D = \{f_{a,b} \in G \mid b = 0\}$ e sia $\tau = f_{1,1} \in T$. Si dimostri che:

- ogni elemento non identico di T è coniugato di τ mediante un elemento di D.
- se H è un sottogruppo di G contenente τ e D, allora $H = G$.

Esercizio 7 Sia N un sottogruppo di G contenuto nel centro di G. Dimostrare che N è normale in G e che, se G/N è ciclico, allora G è abeliano.

Esercizio 8 Sia x un elemento di ordine $n \in N$ in un gruppo G, e sia $n = p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_s^{k_s}$ ove $p_1, ..., p_s$ sono primi distinti. Allora $x = x_1 \cdot ... \cdot x_s$, ove x_i ha ordine $p_i^{k_i}$ e $x_i = x^{m_i}$ per un qualche intero m_i $(i = 1, ..., s)$. Inoltre, se $x = y_1 \cdot ... \cdot y_s$, ove, per ogni $i, j = 1, ..., s$, y_i ha ordine una potenza di p_i e $y_i y_j = y_j y_i$, allora $y_i = x_i$.

Esercizio 9 Se A, B e C sono sottogruppi di un gruppo G e $A \subseteq C$, allora $AB \cap C = A(B \cap C)$.

Esercizio 10 Sia G un gruppo non ciclico generato da due elementi x e y, entrambi di ordine 2. Allora G ha un sottogruppo normale ciclico C di indice 2 in G. Se G è finito e di ordine $2k$, allora G è isomorfo a D_k (gruppo diedrale di ordine $2k$).