ESERCIZI DI ALGEBRA 2

26 OTTOBRE

Esercizio 1 Nel gruppo S_8 si consideri il sottoinsieme

$$G = \{\sigma \in S_8 \mid \sigma(x) \leq 5 \text{ per ogni } x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

- Si verifichi che G è un sottogruppo di S_8 .
- Si determini una permutazione $\tau \in G$ di periodo 15.
- Esistono in G elementi di periodo 7?
- Si calcoli $|G|$.

Esercizio 2 Si consideri il gruppo ciclico $\mathbb{Z}$ e due suoi sottogruppi $n\mathbb{Z}$ e $m\mathbb{Z}$. Si dimostri che

$$\frac{m\mathbb{Z}}{MCM(m, n)\mathbb{Z}} \cong \frac{mcd(m, n)\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

e se ne deduca che $mn = MCM(m, n)mcd(m, n)$.

Esercizio 3 Dimostrare che se il gruppo degli automorfismi $Aut(G)$ di un gruppo G è ciclico, allora G è abeliano.

Esercizio 4 Sia G un gruppo e sia α un endomorfismo di G tale che $\alpha^2 = \alpha$. Allora:

- $Im(\alpha) \cap Ker(\alpha) = \{1\}$;
- ogni elemento di G si scrive in modo unico nella forma $g = ab$, con $a \in Im(\alpha)$ e $b \in Ker(\alpha)$.

Esercizio 5 Si provino le seguenti:

- se $\alpha : x \mapsto x^{-1}$ è un automorfismo di G , allora G è abeliano;
- sia β un automorfismo di un gruppo finito G che lascia fissata solo l'identità di G . Allora $G = \{x^{-1}x^\beta \mid x \in G\}$;
- sia G un gruppo finito. Se $Aut(G)$ ha un elemento γ di ordine 2 che lascia solo l'identità di G fissata, allora G è abeliano.

Esercizio 6 Sia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^\times$ la funzione $f(x) = e^{ix}$. Dimostrare che f è un omomorfismo e determinarne nucleo e immagine.

Esercizio 7 Siano U il sottogruppo di $\mathbb{C}^\times$ dei complessi di norma 1 e P il sottogruppo di $\mathbb{C}^\times$ dei reali positivi. Descrivere i gruppi quozienti $\mathbb{C}^\times/U$ e $\mathbb{C}^\times/P$.

Esercizio 8 Siano $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ e $\tau = (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 6)$ elementi di S_8 e sia $G = \langle \sigma\tau \rangle$. Allora:

- $|\sigma| = |\tau| = 4$;

- $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$;
- $\sigma^2 = \tau^2$.

Un gruppo isomorfo a G viene detto *gruppo dei quaternioni* e indicato comunemente con Q . Si dimostri, utilizzando solo le proprietà elencate sopra, che:

- $\sigma\tau^j = \tau^{-j}\sigma$ per ogni $j \in \mathbb{Z}$;
- ogni elemento di G è del tipo $g = \sigma^i\tau^j$, per opportuni i, j interi;
- dedurre che, posto $H = \langle \tau \rangle$, H ha indice 2 in G .
- si provi che $Z(G) = \langle \sigma^2 \rangle$.
- si trovi a che gruppo noto è isomorfo il gruppo degli automorfismi interni di G .

Esercizio 9 Trovare due gruppi non isomorfi che abbiano gruppi degli automorfismi isomorfi. Trovare due gruppi che abbiano gruppi degli automorfismi interni isomorfi e non banali, ma gruppo degli automorfismi non isomorfi.

I SEGUENTI ESERCIZI NECESSITANO DEI CONCETTI DEL PARAGRAFO 5.11 DEL LIBRO.

Esercizio 10 Se A e B sono sottogruppi di un gruppo G , allora G è unione disgiunta di *classi laterali doppie* della forma AxB , per $x \in G$. Se A e B sono gruppi finiti, allora l'ordine di AxB è $|A||B| : x^{-1}Ax \cap B$. (Suggerimento: si consideri l'azione di B sulle classi laterali Ax , per $x \in G$)

Esercizio 11 Sia S_6 il gruppo delle permutazioni su sei oggetti.

- Determinare il centralizzante in S_6 della permutazione $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 6)$.
- Quante classi di coniugio di elementi di ordine 5 ci sono in A_6 ? Per ciascuna di queste classi se ne dia un rappresentante e se ne calcoli l'ordine.
- Si verifichi che $C_{S_6}((1\ 2\ 3)) \neq A_6$ e se ne deduca che i 3-cicli formano un'unica classe di coniugio in A_6 .

Esercizio 12 Sia G un gruppo che agisce su un insieme X , $|X| \geq 2$ e si assuma che l'azione sia transitiva. Si provi che esiste un $g \in G$ tale che $gx \neq x$ per ogni $x \in X$