ESERCIZI DI ALGEBRA 2

2 NOVEMBRE

Esercizio 1 Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e sia G il sottogruppo cicilico di S_6 generato dall'elemento $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$. Il gruppo G agisce quindi in modo naturale sull'insieme X.

- Quali e quante sono le orbite di G in X? Quanti elementi hanno?
- Il gruppo G agisce transitivamente su X?
- Si calcoli lo stabilizzatore di 1 in G.

Esercizio 2 Sia Q il seguente gruppo di $GL_2(\mathbb{C})$:

$$Q = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \}$$

Si consideri l'azione del gruppo Q su $\mathbb{C}^2$ determinata dal prodotto righe per colonne.

- Determinare le orbite di $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed i rispettivi stabilizzatori
- Determinare il nucleo dell'azione (intesa come omomorfismo da G in $S(\mathbb{C}^2)$).
- Determinare l'insieme dei punti fissi di $\mathbb{C}^2$ per l'azione di Q.

Esercizio 3 Siano date le permutazioni di S_5:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- Determinare la decomposizione ciclica di σ e di τ e il prodotto $\sigma\tau$.
- L'elemento σ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di S_5? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow.
- L'elemento τ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di S_5? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow.
- Dimostrare che ogni 2-sottogruppo di Sylow di S_5 contiene un sottogruppo ciclico di ordine 4.
- Determinare il centralizzante $C_{S_5}(\sigma)$ in S_5 e la cardinalità della classe di coniugio di σ.

Esercizio 4 Sia G un gruppo di ordine 39.

- Determinare il numero k_{13} dei 13-sottogruppi di Sylow di G.
- Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale H isomorfo a C_{13} ed un sottogruppo K isomorfo a C_3.
- Dimostrare che $G = HK$ e che $H \cap K = \{1\}$

Esercizio 5 Si considerino in S_9 le permutazioni:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si provi che $\sigma\tau = \tau\sigma$.
- Si trovi la decomposizioni in cicli disgiunti e l'ordine delle permutazioni σ, τ e $\sigma\tau$.
- Si consideri il sottogruppo G di S_9 generato da σ e τ. E' ciclico? E' abeliano? Quanti elementi ha?
- G è un sottogruppo di Sylow di S_9?

Esercizio 6 Nel gruppo di matrici $GL_2(\mathbb{Z}_6)$ si considerino gli elementi

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia G il sottogruppo da loro generato.

- Si determinino i periodi di a e b.
- Si provi che $\langle a \rangle$ è normale in G e si calcoli $|G|$.
- Si determinino i sottogruppi di Sylow di G.
- Si dimostri che a^3 è contenuto in ogni 2-sottogruppo di Sylow di G.

Esercizio 7 Dato il gruppo ciclico C_{15} di ordine 15, sia $\phi\colon G \to G$ la mappa definita da $\phi(g) = g^2$. Dimostrare che ϕ è un automorfismo di G e calcolare $|\phi|$ e $|Aut(G)|$.

Esercizio 8 Nel gruppo S_5 delle permutazioni su 5 elementi, si considerino gli elementi

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

e il gruppo H da loro generato.

- Si dimostri che $\langle a \rangle$ è normale in H e si calcoli $|H|$.
- Si elenchino gli elementi di H e i suoi sottogruppi di Sylow.
- Si individui $Z(H)$ e le classi di coniugio di H.

Esercizio 9 Sia G un gruppo di ordine 78.

- Si calcoli il numero k_{13} dei suoi 13-sottogruppi di Sylow.
- Si dimistri che esiste un sottogruppo N normale in G isomorfo a C_{13}.
- Contare gli elementi di ordine 13 in G.

Esercizio 10 Si G un gruppo di ordine 39.

- Si dimostri che se G è abeliano, allora è ciclico.
- Nel caso in cui G non sia abeliano, si contino i p-sottogruppi di Sylow di G.
- Nel caso in cui G non sia abeliano, si contino gli elementi di ciascuno ordine in G.

Esercizio 11 Sia G un gruppo semplice di ordine 168. Si contino i 7-sottogruppi di Sylow e gli elementi di ordine 7.