

ESERCIZI DI ALGEBRA 2

9 NOVEMBRE

Esercizio 1 Sia $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ e si defisca su G l'operazione $(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$.

- Verificare che l'operazione così definita induce una struttura di gruppo su G .
- Si dimostri che $H = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ è un sottogruppo di G e che $K = \{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G .
- Sia N un sottogruppo non banale di H normale in G . Si dimostri che $N = K$.
- E' vero che G è il prodotto diretto interno di H e K ?

Esercizio 2 Nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{Q}^*$ dei razionali non nulli si consideri il sottoinsieme

$$D = \{2^x 5^y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Si verifichi che:

- D è un sottogruppo di $\mathbb{Q}^*$;
- D è il prodotto diretto interno di $\langle 2 \rangle$ e $\langle 5 \rangle$;
- l'applicazione $\eta : D \rightarrow \mathbb{Z}$ definita ponendo $\eta(2^x 5^y) = x - y$ è un omomorfismo suriettivo di D sul gruppo additivo degli interi.
- Si descriva il nucleo di D e si provi che è ciclico.

Esercizio 3 Sia G un gruppo e sia ϕ un'applicazione di G in G . Si considerino il prodotto diretto $\mathcal{G} = G \times G$ e in esso il sottoinsieme $\mathcal{H} = \{(g, \phi(g)) \mid g \in G\}$. Si mostri che $\mathcal{H}$ è un sottogruppo di $\mathcal{G}$ se e solo se ϕ è un endomorfismo di G . In tal caso si consideri il sottogruppo $\mathcal{L} = \{(g, 1) \mid g \in G\}$ di $\mathcal{G}$ e si provi che:

- $\mathcal{H} \cap \mathcal{L} = \{(1, 1)\}$ se e solo se ϕ è iniettiva;
- $\mathcal{H}\mathcal{L} = \mathcal{G}$ se e solo se ϕ è suriettiva;
- $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times \mathcal{L}$ se e solo se G è abeliano e ϕ è un automorfismo.

Esercizio 4 Sia $G = S_4 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

- Si scriva esplicitamente chi è il prodotto $(\sigma, a + 6\mathbb{Z})(\tau, b + 6\mathbb{Z})$, chi è l'unità di G e chi è $(\sigma, a + 6\mathbb{Z})^{-1}$.
- Si dica se G è ciclico.
- Scrivere un elemento di G di ordine 12.
- Quali tra i seguenti elementi di G sono coniugati?

$$a = ((1 \ 2 \ 3), 2 + 6\mathbb{Z}), b = ((1 \ 3 \ 4), 3 + 6\mathbb{Z}), c = ((1 \ 2), 2 + 6\mathbb{Z}), d = ((1 \ 3 \ 4), 2 + 6\mathbb{Z})$$

- Trovare in G il centralizzante di a .

Esercizio 5 Dimostrare che il gruppo diedrale D_n è il prodotto semidiretto di un gruppo ciclico di ordine n e di un gruppo di ordine 2.

Esercizio 6 Sia $G = N \rtimes H$ il prodotto semidiretto di un suo sottogruppo normale N e di un sottogruppo H , siano $\iota: N \rightarrow G$ l'inclusione e $\pi: G \rightarrow H$ la proiezione definita da $\pi(nh) = h$. Si dimostri che:

- $Im(\iota) = Ker(\pi)$.
- esiste un omomorfismo $\psi: H \rightarrow G$ tale che $\pi\psi = id_H$.

Supponiamo adesso invece di avere N, H, G gruppi con $\iota: N \rightarrow G$ monomorfismo e $\pi: G \rightarrow H$ epimorfismo, tali che $Im(\iota) = Ker(\pi)$ e che esista un omomorfismo $\psi: H \rightarrow G$ con $\pi\psi = id_H$. Dimostrare che allora G è il prodotto semidiretto di N e H .

Esercizio 7 Si dimostrino le seguenti identità tra i commutatori:

- $[x, y]^{-1} = [y, x]$;
- $[xy, z] = x[y, z]x^{-1}[x, z]$;
- $[x, yz] = [x, y]y[x, z]y^{-1}$;
- $y^{-1}[[y, x^{-1}], z^{-1}]yz^{-1}[[z, y^{-1}], x^{-1}]zx^{-1}[[x, z^{-1}], y^{-1}]y^{-1} = 1$.

Esercizio 8 Siano x e y elementi di un gruppo G di ordine rispettivamente m e n . Se x e y commutano con $[x, y]$ allora $[x, y]^d = 1$, ove d è il massimo comun divisore di m e n .

Esercizio 9

- Si dimostri che, dato un sottogruppo normale N di un gruppo G , G è risolubile se e solo se N e G/N sono risolubili.
- Si dimostri che ogni p -gruppo finito è risolubile.

Esercizio 10 Calcolare le serie dei commutatori dei gruppi diedrali D_5 e D_6 .