ESERCIZI DI ALGEBRA 2

23 NOVEMBRE

Esercizio 1 Dimostrare che il gruppo abeliano $(\mathbb{Q}, +)$ non si può scrivere come somma diretta di due o più sottogruppi non banali.

Esercizio 2 Elencare i gruppi abeliani di ordine 1800 e per ogni possibilità determinare l'ordine massimo di un elemento.

Esercizio 3 Disegnare il reticolo dei sottogruppi di un gruppo ciclico di ordine 60.

Esercizio 4 Sia $u = \sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

- Dimostrare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
- Determinare il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$ e le radici reali di f.
- Determinare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- Individuare una base di $\mathbb{Q}(u)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Esercizio 5 Sia $u = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} \in \mathbb{R}$.

- Provare che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ e dedurre che $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$.
- Sia $v = i + \sqrt[3]{5}$; calcolare il polinomio minimo di v su $\mathbb{Q}(u)$.
- Calcolare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6 Sia $f(x) = x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

- Dimostrare che f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.
- Sia u una radice di f. Si scriva $\frac{2u}{u+1} \in \mathbb{Q}(u)$ come polinomio in u a coefficienti razionali.
- Si determini il polinomio minimo di $v = u^2$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 7 Sia $u = \sqrt{5-\sqrt{5}}$.

- Si dimostri che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e si determinino il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$, il grado $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$ dell'estensione e una base di $\mathbb{Q}(u)$ su $\mathbb{Q}$.
- Si provi che $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(u)$.
- Si determini il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
- Si provi che u è invertibile in $\mathbb{Q}[u]$ e si determini il suo inverso.

Esercizio 8 Sia $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

- Verificare che γ è algebrico su $\mathbb{Q}$.
- Calcolare γ^{-1} in $\mathbb{Q}[\gamma]$.
- Si dimostri che $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ e si deduca $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 9

- Sia u un elemento di una estenzione E di un campo F. Si dimostri che se $[F(u) : F]$ è dispari, allora $F(u^2) = F(u)$.
- Si dimostri che se il grado di un'estensione $[L : F]$ è uguale ad un numero primo p, allora non esistono campi S tali che $F \subsetneqq S \subsetneqq L$.

Esercizio 10 Si dimostri che, se L/F è un'estensione di grado n e $u \in L$, allora il grado del polinomio minimo di u rispetto ad F divide n.