ESERCIZI DI ALGEBRA 2

30 NOVEMBRE

Esercizio 1 Determinare il campo di spezzamento E del polinomio $x^6 - 6x^3 + 8$ su $\mathbb{Q}$, il grado di E su $\mathbb{Q}$ e un base di E come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2 Sia $p(x) = x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.

- Fattorizzare $p(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$.
- Determinare il campo di spezzamento E di $p(x)$ su $\mathbb{Q}$ e il grado $[E : \mathbb{Q}]$.
- Il campo $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$ è di spezzamento per $p(x)$?

Esercizio 3 Trovare il campo di spezzamento di $x^4 + 1$ su $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e su un qualsiasi campo di caratteristica 2.

Esercizio 4 Sia $\alpha = \sqrt{3} + \frac{i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

- Dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$ e determinarne il polinomio minimo $m(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.
- Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i\sqrt{2})$.
- Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha)$ è campo di spezzamento per $m(x)$ su $\mathbb{Q}$.
- Verificare che $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Esercizio 5 Sia $u = \sqrt{3 + \sqrt{11}} \in \mathbb{R}$.

- Provare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e determinarne il polinomio minimo $g(x)$.
- Calcolare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$.
- Esprimere $\frac{2u}{u^3 - 6u}$ come polinomio in $\mathbb{Q}[u]$.
- Determinare un campo di spezzamento E di $g(x)$ su $\mathbb{Q}$ e il grado dell'estensione $[E : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 6 Sia ζ una radice primitiva sesta dell'unità in $\mathbb{C}$.

- Determinare il polinomio minimo di ζ su $\mathbb{Q}$.
- Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt{3}\zeta)$.
- Determinare il polinomio minimo $p(x)$ di $\sqrt{3}\zeta$ su $\mathbb{Q}$.
- Dire se $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\zeta)$ è di spezzamento per $p(x)$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 7 Sia $\alpha = \sqrt{7} + i$.

- Si dimostri che α è algebrico su $\mathbb{Q}$.
- Si provi che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$.
- Si determini il polinomio minimo $m(x)$ di α su $\mathbb{Q}$.
- Dire se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un campo di spezzamento E per $m(x)$ su $\mathbb{Q}$.
- Determinare $[E : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 8 Sia F_2 il campo con due elementi.

- Determinare tutti i polinomi irriducibili di terzo grado in $F_2[x]$.
- Si fattorizzi in irriducibili $x^8 - x \in F_2[x]$.
- Dimostrare che se $g \in F_2[x]$ è irriducibile di grado n, allora g divide $x^{2^n} - x \in F_2[x]$.

Esercizio 9 Sia u una radice del polinomio $g(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

- Dimostrare che $g(x)$ è il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.
- Verificare che anche $u^2 - 2$ è radice di g.
- Dimostrare che $\mathbb{Q}(u)$ è di spezzamento per g su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 10 Sia F_7 il campo con 7 elementi e sia $f(x) = x^3 + 2 \in F_7$.

- Dimostrare che $f(x)$ è irriducibile in $F_7[x]$.
- Si costruisca un'estensione semplice E di F_7 che contiene uno zero α di $f(x)$.
- Si calcoli $|E|$.
- Si dica se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(x)$ divide in F_7 il polinomio $x^{7^n} - x$.