Esame di Algebra 2

1 luglio 2011

Esercizio 1 Sia G un gruppo di ordine $9 \cdot 13$. Si dimostri che:

(1) G è il prodotto semidiretto dei suoi sottogruppi di Sylow.
(2) Se c'è un unico 3-sottogruppo di Sylow Q, allora G è abeliano.
(3) Se Q è l'unico 3-sottogruppo di Sylow ed è ciclico, allora G è ciclico.
(4) Si dia un esempio di un gruppo G abeliano di ordine $9 \cdot 13$ non ciclico.

Esercizio 2 Sia A l'anello $\mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}$.

(1) Si dimostri che gli elementi invertibili di A sono 720.
(2) Si dimostri che A è prodotto diretto di tre campi.
(3) Si dimostri che l'insieme $\{ a \in A \mid a^2 = a \}$ ha 8 elementi.

Esercizio 3 Sia K un'estensione del campo F, $a \in K$ un elemento algebrico su F, $p(x)$ il suo polinomio minimo, ed n il grado di $p(x)$. Si dimostri che $\{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ è una base di $F(a)$ su F.

Esercizio 4 Sia $u = 2i + \sqrt[3]{5} \in \mathbb{C}$.

(1) Si verifichi che $i \in \mathbb{Q}(u)$.
(2) Se ne deduca che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i)$.
(3) Si calcolino i gradi $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})]$ e $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}(i)]$.
(4) Si determinino i polinomi minimi $f(x)$ di u su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ e $g(x)$ di u su $\mathbb{Q}(i)$.
(5) $\mathbb{Q}(u)$ è campo di riducibilità completa per $f(x) \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})[x]$?

Esercizio 5 Nel gruppo simmetrico S_5 si considerino gli elementi $\sigma = (1,\ 2)(3,\ 4)$ e $\tau = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$. Si determini la cardinalità delle classi di coniugio di σ e di τ in S_5.