Esame di Algebra 2

19 settembre 2011

Esercizio 1 Si consideri il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2951x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv n \pmod 6 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali $n \in \mathbb{Z}$ il sistema ha soluzioni.
(b) Determinare le soluzioni del sistema per $n = 5$.

Esercizio 2 Siano G un gruppo, H un sottogruppo di G e $X = \{\, xH \mid x \in G \,\}$ l'insieme delle classi laterali sinistre. Per ogni $g \in G$ sia $T_g \colon X \to X$ la biiezione definita da $T_g(xH) = gxH$ per ogni $x \in G$. Siano $\mathcal{S}(X)$ il gruppo di tutte le biiezioni di X in X e $\Psi \colon G \to \mathcal{S}(X)$ l'applicazione definita da $\Psi(g) = T_g$ per ogni $g \in G$.

(a) Si dimostri che Ψ è un omomorfismo di gruppi.
(b) Si dimostri che il nucleo di Ψ è il più grande sottogruppo normale di G contenuto in H.

Esercizio 3 Sia p un numero primo e $\mathrm{Sym}(p)$ il gruppo simmetrico su p oggetti.

(a) Si determini l'ordine dei p-sottogruppi di Sylow di $\mathrm{Sym}(p)$.
(b) Si esibisca un esempio di p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{Sym}(p)$ per $p = 5$.
(c) Si determini quanti sono i p-sottogruppi di Sylow di $\mathrm{Sym}(p)$.

Esercizio 4 Sia $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ l'insieme di tutti i numeri complessi della forma $\dfrac{a + ib}{2^n}$, dove $a, b, n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$. Sia $\mathbb{Z}[i] = \{\, a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$ l'anello degli interi di Gauss.

(a) Si dimostri che $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ è sottoanello del campo complesso $\mathbb{C}$.
(b) Sia $\nu \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ la norma, definita da $\nu(\alpha + i\beta) = \alpha^2 + \beta^2$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $\dfrac{a + ib}{2^n} \in \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ (dove $a, b, n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$) è invertibile in $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ se e solo se $\nu(a + ib) = 2^t$ per qualche numero intero $t \geq 0$.
(c) Si dimostri che se I è ideale di $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$, allora $I \cap \mathbb{Z}[i]$ è ideale di $\mathbb{Z}[i]$.
(d) Sia I ideale di $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$. Si dimostri che se $a + ib$ genera l'ideale $I \cap \mathbb{Z}[i]$ di $\mathbb{Z}[i]$ per qualche $a, b \in \mathbb{Z}$, allora $a + ib$ genera l'ideale I di $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$.
(e) Si dimostri che $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ è dominio a ideali principali.
(f) Si dimostri che $\mathbb{Z}[i, \frac{1}{2}]$ è dominio a fattorizzazione unica.

Esercizio 5

(a) Si dimostri che il polinomio $x^3 + x^2 + 1$ è un elemento irriducibile dell'anello $\mathbb{Z}_2[x]$.
(b) Si costruisca un campo F con 8 elementi. Quanti campi con 8 elementi esistono a meno di isomorfismi?
(c) Si determini un generatore g del gruppo moltiplicativo F^*.