Esame di Algebra 2 - 8 aprile 2011

Esercizio 1. (a) Si enunci il Teorema cinese del resto.
(b) Si determinino tutti i numeri interi x che sono soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 2 \pmod 4 \\ 2x \equiv 0 \pmod{14}. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ il sottoanello di $\mathbb{C}$ costituito da tutti i numeri complessi del tipo $a+ib\sqrt{7}$ con a e b interi. Si consideri la norma $N\colon \mathbb{Z}[i\sqrt{7}] \to \mathbb{N}$ definita da $N(a+ib\sqrt{7}) = a^2+7b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$. Facendo uso di tale norma N, si dimostri che:
(a) Gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ sono solo 1 e -1.
(b) 2 è un elemento irriducibile di $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.
(c) Il dominio $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ non è a fattorizzazione unica. [Suggerimento: Si fattorizzi 8.]
(d) Se ne deduca che il dominio $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ ha ideali non principali.

Esercizio 3. Esistono elementi di ordine 6 in S_5? Quanti sono?

Esercizio 4. (a) Si dimostri che ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico.
(b) Siano G un gruppo, $\mathrm{Aut}(G)$ il suo gruppo degli automorfismi e $Z(G)$ il centro di G. Si dimostri che se il gruppo $\mathrm{Aut}(G)$ è ciclico, allora anche il gruppo $G/Z(G)$ è ciclico.

Esercizio 5. Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio di grado 3 e sia E il campo di riducibilità completa di f su $\mathbb{Q}$.
(a) Si dimostri che se f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$, allora $[E:\mathbb{Q}] = 3$ oppure $[E:\mathbb{Q}] = 6$.
(b) Si dimostri che se f è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$, allora $[E:\mathbb{Q}] = 1$ oppure $[E:\mathbb{Q}] = 2$.
(c) Si dia un esempio di un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ di grado 3 per il quale $[E:\mathbb{Q}] = 6$.