Esame di Algebra 2 - 10 gennaio 2011

Esercizio 1. Si risolva il seguente sistema di congruenze in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 2x \equiv 2 \pmod{12} \\ 3x \equiv 6 \pmod{12}. \end{cases}$$

Esercizio 2. (a) Si dimostri che se G è un gruppo abeliano ed N è un suo sottogruppo, allora N è normale in G e G/N è abeliano.
(b) Si dia un esempio di un gruppo non abeliano G con un sottogruppo N normale tale che G/N sia abeliano.

Esercizio 3. Sia G un gruppo finito. Si dimostri quanto segue:
(a) Si dimostri che se $x_1, \ldots, x_n$ è un insieme di rappresentanti delle classi di coniugio di G, allora $|G| = \sum_{i=1}^{n} [G : C_G(x_i)]$, dove $C_G(x)$ è il centralizzante di x in G.
(b) Si dimostri che se $|G| = p^t$ con p primo e $t \geq 1$, allora G ha centro non identico.

Si consideri ora l'azione di G per coniugio sull'insieme X di tutti i sottogruppi di G data da $G \times X \to X$, $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$. Si provi che:
(c) L'orbita di un elemento $H \in X$ consiste del solo H se e solo se H è un sottogruppo normale di G.
(d) Se $|G| = p^t$ con p primo e $t \geq 1$, il numero $|X|$ dei sottogruppi di G differisce dal numero dei sottogruppi normali di G per un multiplo di p. (Suggerimento: si ragioni come nel punto (b))

Esercizio 4. Sia $u = \sqrt{5} - \sqrt[4]{5} \in \mathbb{C}$.
(a) Si dimostri che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
(b) Si determini il polinomio minimo $f(x)$ di u su $\mathbb{Q}$, motivando la risposta.
(c) È vero che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$?

Esercizio 5. Sia $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.
(a) Si dimostri che $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_2[x]$.
(b) Se α è una radice di $f(x)$ in un'estensione di $\mathbb{Z}_2$, quanti e quali elementi ha l'estensione $\mathbb{Z}_2(\alpha)$?
(c) Si determini, se esiste, un generatore del gruppo degli elementi non nulli di $\mathbb{Z}_2(\alpha)$.