Esame di ALGEBRA 2 - 14 dicembre 2010

Si risponda ai seguenti quesiti, giustificando la risposta.

Esercizio 1. Siano R un anello, I un ideale bilatero di R ed S un sottoanello di R. Si dimostri che gli anelli $S + I/I$ e $S/S \cap I$ sono isomorfi.

Esercizio 2. Siano A l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ed $N\colon A \to \mathbb{Z}$ la norma definita da $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$. Si dimostri che:
(a) non esistono elementi in A di norma 2 o 3;
(b) gli elementi $2,\ 3,\ 1+\sqrt{-5},\ 1-\sqrt{-5}$ di A sono irriducibili, ma non primi.
(c) Dedurre dai punti precedenti che A non è un domino a fattorizzazione unica e trovare un elemento con due fattorizzazioni diverse.

Esercizio 3. Sia G un gruppo di ordine 45.
(a) Si calcoli il numero di p-sottogruppi di Sylow di G per $p = 3$ e $p = 5$.
(b) Si dimostri che G è prodotto diretto di due sottogruppi di Sylow.
(c) Si dimostri che G è abeliano.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio $f(x) = 10x^7 - 30 \in \mathbb{Z}[x]$.
(a) Si fattorizzi $f(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$, in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{C}[x]$.
(b) Si determini il grado dell'estensione $\mathbb{Q}(u)$ di $\mathbb{Q}$, dove u è una radice di $f(x)$.
(c) Sia ε una radice primitiva quattordicesima di 1. Si dica qual è il grado di ε^2 su $\mathbb{Q}$ e se è vero che $\varepsilon^2 \in \mathbb{Q}(u)$.
(d) Si dica se $\mathbb{Q}(u)$ è un campo di riducibilità completa di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.
(e) Si determini il polinomio minimo di ε^2 su $\mathbb{Q}(u)$.

Esercizio 5. Siano K campo e α elemento di una estensione di K.
(a) Si dimostri che se α è trascendente su K, anche α^n, dove $n \geq 1$ è un intero, è trascendente su K.
(b) Si dimostri che $[K(\alpha) : K(\alpha^n)] = n$.