

Test di autovalutazione
Algebra 2 16-11-10

- (1) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 5x \equiv 3 \pmod{8} \\ 3x \equiv -6 \pmod{9}. \end{cases}$$

- (2) Sia R l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ dove n è un intero privo di quadrati e $n > 3$.
- (a) Provare che gli elementi 2 , $\sqrt{-n}$, $1 + \sqrt{-n}$ sono irriducibili;
 - (b) Provare che R non è un dominio a fattorizzazione unica esibendo un elemento con due fattorizzazioni diverse.
 - (c) Verificare che R non è un dominio principale: si consideri un massimale che contenga gli elementi $\sqrt{-n}$ e $1 + \sqrt{-n}$.
- (3) Sia R un anello e I un suo ideale. Si dimostri che per ogni sottoanello A di R risulta

$$A/(A \cap I) \cong (A + I)/I.$$

Se ne deduca che $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

- (4) Nel gruppo simmetrico S_{12} si consideri l'elemento

$$\sigma = (1, 5, 12)(2, 9, 11, 7, 3)(6, 10, 8).$$

- (a) Determinare la cardinalità della classe di coniugio di σ .
- (b) Verificare che σ^2 è coniugata a σ esibendo un elemento τ tale che $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$.
- (c) È vero che per ogni elemento $\sigma \in S_{12}$ si ha che σ^2 è coniugata a σ ?