Esercizi algebra 2 17-11-10

(1) (a) Determinare il centralizzante in S_6 della permutazione $\sigma = (1, 2, 3, 4, 6)$;
(b) Quante classi di coniugio di elementi di ordine 5 ci sono in A_6? Per ognuna di queste se ne dia un rappresentante e se ne calcoli l'ordine.
(c) Si verifichi che $C_{S_6}((1, 2, 3)) \nleq A_6$ e se ne deduca che i 3-cicli formano un unica classe di coniugio in A_6.

(2) Sia G un gruppo che agisce su un insieme $|X| \geq 2$ e si assuma che l'azione sia transitiva. Si provi che esiste un $g \in G$ tale che $gx \neq x$ per ogni $x \in X$.

(3) Dato il gruppo ciclico C_{15} di ordine 15 sia $\Psi : G \mapsto G$ l'omomorfismo definito da $\Psi(g) = g^2$. Dimostrare che Ψ è automorfismo e calcolarne l'ordine come elemento di $Aut(G)$.

(4) Dimostrare che se il gruppo degli automorfismi di un gruppo G è ciclico, allora G è abeliano.

(5) Sia S_6 il gruppo simmetrico su $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e G il gruppo ciclico generato da $\sigma = (1,\ 2,\ 3)(4,\ 5)$.
(a) Quante sono le orbite di G in X?
(b) G è transitivo su X?
(c) Calcolare lo stabilizzante di 1 in G.

(6) Determinare il centralizzante di un r-ciclo in S_n.

(7) (a) Calcolare le classi di coniugio di A_5.
(b) Se N è un sottogruppo normale di un gruppo G allora N è unione disgiunta di classi di coniugio.
(c) Si provi che A_5 non ha sottogruppi normali non banali: si consideri la cardinalita' di un tale sottogruppo..

(8) Sia G un gruppo, N un suo sottogruppo normale. Siano A e B sottogruppi di G contenenti N e siano $\overline{A} = A/N$ e $\overline{B} = B/N$. Si provi che:
(a) se $A \leq B$ allora $|B : A| = |\overline{B} : \overline{A}|$;
(b) $\langle \overline{A}, \overline{B} \rangle = \overline{\langle A, B \rangle}$;
(c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
(d) $A \lhd G$ se e solo se $\overline{A} \lhd G/N$.