Esercizi algebra 23-11-10

(1) Determinare il centralizzante di un r-ciclo in S_n.
(2) Sia G un gruppo di ordine 231.
  (a) Si determini quanti sono gli 11-sottogruppi di Sylow di G.
  (b) Si provi che tali sottogruppi sono normali in G.
  (c) Si determini quanti sono gli elementi di G di ordine 11.
(3) Sia $G = S_5 \times C_2$ il prodotto diretto del gruppo simmetrico S_5 e del gruppo ciclico di ordine 2 di generatore x. Sia dato l'elemento di S_5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

  (a) Determinare l'ordine di σ in S_5 e l'ordine dell'elemento $(\sigma, x) \in G$.
  (b) L'elemento $(\sigma, 1)$ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
  (c) L'elemento (σ, x) appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
(4) Sia G un gruppo di ordine 39.
  (a) Si dimostri che se G è abeliano, allora è ciclico.
  (b) Nel caso in cui G non sia abeliano, si contino i p-sottogruppi di Sylow di G.
  (c) Nel caso in cui G non sia abeliano, si contino gli elementi di ciascuno ordine in G.
(5) Sia G un gruppo di ordine 78.
  (a) Determinare il numero n_{13} dei 13-sottogruppi di Sylow di G.
  (b) Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale H isomorfo a C_{13}.
  (c) Contare gli elementi di ordine 13 in G.
(6) Siano p e q due numeri primi distinti con $q < p$, sia m un intero positivo e sia G un gruppo di ordine qp^m.
  (a) Determinare il numero dei p-sottogruppi di Sylow di G e dimostrare che G possiede un p-sottogruppo di Sylow normale P.
  (b) Dimostrare che un qualsiasi q-sottogruppo di Sylow di G è ciclico.
  Sia Q un qualsiasi q-sottogruppo di Sylow di G.
  (c) Dimostrare che $PQ \leq G$.
  (d) Calcolare $|PQ|$ e verificare che $G = PQ$.
  (e) Dimostrare che G è isomorfo ad un prodotto semidiretto di un gruppo di ordine p^m per un gruppo di ordine q.
  (f) Dimostrare che il prodotto semidiretto di cui al punto precedente è diretto se e solo se esiste un solo q-sottogruppo di Sylow in G.
(7) Sia G un gruppo di ordine $11^2 \cdot 13^2$.
  (a) Si determini il numero di p-sottogruppi di Sylow di G per ogni primo p.
  (b) Si provi che G è prodotto diretto di due sottogruppi non banali.
  (c) Si dica se G è abeliano (dimostrazione o controesempio).
  (d) Si dica se G è ciclico (dimostrazione o controesempio).
(8) Sia G un gruppo e sia ψ unapplicazione di G in G. Si considerino il prodotto diretto $G = G \times G$ e in esso il sottoinsieme $H = \{(g, \psi(g)) \mid g \in G\}$. Si

mostri che H è un sottogruppo di G se e solo se ψ è un endomorfismo di G. In tal caso di consideri il sottogruppo $L = \{(g, 1) \mid g \in G\}$ di G e si provi che:

(a) $H \cap L = \{(1, 1)\}$ se e solo se ψ è iniettiva;
(b) $HL = G$ se e solo se ψ è suriettiva;
(c) $G = H \times L$ se e solo se G è abeliano e ψ è un automorfismo.

(9) Sia G un gruppo; si consideri il prodotto diretto $G \times G$. Si dimostri che se $G \times G$ è ciclico allora $G = \{1\}$.

(10) Siano A e B gruppi ciclici finiti di ordine m e n, rispettivamente. Dimostrare che $A \times B$ è ciclico se e solo se m e n sono relativamente primi.

(11) Siano G un gruppo e $G\times G$ il prodotto diretto di due copie di G. Si consideri l'insieme

$$\Delta(G) = \{\, (g, g) \mid g \in G \,\}.$$

(a) Si dimostri che $\Delta(G)$ è sottogruppo di $G \times G$.
(b) Si dimostri che il gruppo $\Delta(G)$ è isomorfo a G.
(c) Si dimostri che $\Delta(G)$ è sottogruppo normale di $G \times G$ se e solo se G è abeliano.

(12) (a) es 5.8.9 del libro di testo (definizione di normalizzante)
(b) Sia H un sottogruppo di G e Ω l'insieme dei suoi coniugati. Provare che G agisce su Ω e che lo stabilizzante di H è il normalizzante di H in G.
(c) Provare che il numero dei p-sottogruppi di Sylow di G uguaglia l'indice del normalizzante di un p-Sylow in G.

(13) Si provi che un gruppo G di ordine $2^3 3^2$ non è semplice (ovvero esiste un sottogruppo normale non banale). (suggerimento: usare l'esercizio precedente e il teorema di Cayley generalizzato)