

### Esercizi algebra 2 26-10-10

- (1) Risolvere la seguente congruenza

$$6x \equiv 9 \pmod{15}$$

- (2) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 0 \pmod{9} \\ 2x \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

- (3) Trovare gli elementi idempotenti ( $a^2 = a$ ) di  $\mathbb{Z}_6$ .

- (4) Dati  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ , si trovino le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{2} \\ x \equiv a_2 \pmod{3} \\ x \equiv a_3 \pmod{5} \end{cases}$$

- (5) Provare che  $2^{63}$  non è congruo a 2 modulo 63.

- (6) La congruenza  $ax \equiv 1 \pmod{n}$  ha soluzione se e solo se  $(a, n) = 1$  e in questo caso una soluzione è data da  $a^{\phi(n)-1}$ . Generalizzare alla congruenza  $ax \equiv b \pmod{n}$ .

- (7) Calcolare  $[2^{100}]_{17}$ .

- (8) Trovare l'intero positivo minore di 29 tale che  $x \equiv 27! \pmod{29}$ .

- (9) Sia  $p > 2$  un numero primo e  $a$  un intero primo con  $p$ . Provare che  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ .

- (10) Fattorizzare  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  in  $\mathbb{R}[x]$  (calcolare  $f(-1)$ ).

- (11) Fattorizzare  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$  in  $\mathbb{Z}_3[x]$ .

- (12) Trovare gli ideali di  $R = \mathbb{Z}_{12}$ .

- (13) Sia  $f : \mathbb{Z}_{12} \mapsto \mathbb{Z}_3$  l'omomorfismo definito da  $f([x]_{12}) = [x]_3$ . Si studi l'anello quoziente  $\mathbb{Z}_{12}/\ker f$ .

- (14) Sia  $R = \mathbb{Z}[x]$  e  $I$  l'insieme dei polinomi di  $R$  a termine noto pari. Si provi che  $I$  è ideale e si studi l'anello quoziente  $R/I$ .