Esercizi algebra 30-11-10

(1) Elencare i gruppi abeliani di ordine 1800 e per ogni possibilità determinare l'ordine massimo di un elemento.

(2) (14-12-09) Si dia un esempio di due gruppi abeliani di ordine 12 non isomorfi.

(3) (a) Si dimostri che, dato un sottogruppo normale N di un gruppo G, G è risolubile se e solo se N e G/N sono risolubili.
(b) Si dimistri che ogni p-gruppo finito è risolubile.

(4) Si dimostrino le seguenti identità tra i commutatori:
(a) $[x, y]^{-1} = [y, x]$;
(b) $[xy, z] = x[y, z]x^{-1}[x, z]$;
(c) $[x, yz] = [x, y]y[x, z]y^{-1}$.

(5) (14-12-09) Siano A, B gruppi finiti e p un numero primo.
(a) Si dimostri che i p-sottogruppi di Sylow del prodotto diretto $A \times B$ sono tutti e soli della forma $P \times Q$, dove P è un p-sottogruppo di Sylow di A e Q è un p-sottogruppo di Sylow di B.
(b) Si denoti con $n_p(G)$ il numero di p-sottogruppi di Sylow di un gruppo G. Si dimostri che $n_p(A \times B) = n_p(A)n_p(B)$.

(6) (1-7-2010) Sia G un gruppo finito e $\psi : G \to H$ un epimorfismo. Si provi che se P è un p-sottogruppo di Sylow in G, allora $\psi(P)$ è un p-sottogruppo di Sylow in H.

(7) (3-12-2009) Sia F un'estensione del campo K e siano α, β elementi di F. Si supponga che α sia trascendente su K e che α sia algebrico su $K(\beta)$. Si dimostri che β è trascendente su K.

(8) (3-12-2009) Sia $u = \sqrt{2} + i$.
(a) Si dimostri che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
(b) Si dimostri che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(u)$ e si dica se $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(u)$.
(c) Si calcoli il grado $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$ e il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$.
(d) Si scriva $1/u$ come combinazione lineare a coefficienti razionali di potenze a esponente intero non-negativo di u.

(9) Sia dato $u = \sqrt{3} + i\sqrt{2} \in \mathbb{C}$.
(a) Dimostrare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
(b) Dimostrare che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i\sqrt{2})$.
(c) Determinare il polinomio minimo $m(x)$ di u su $\mathbb{Q}$, motivando la risposta.
(d) Dire se $\mathbb{Q}(u)$ è il campo di spezzamento E per $m(x)$ su $\mathbb{Q}$.
(e) Scrivere $(1 + u)^{-1}$ come combinazione lineare di $1, u, u^2, \ldots$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

(10) Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo.
(a) Si dimostri che il numero di coniugati di H in G è pari all'indice del normalizzante di H in G.
(b) Provare che se H è un sottogruppo di indice n in G, allora G ha un sottogruppo normale N contenuto in H di indice che divide $n!$.
(c) Si provi che un gruppo di ordine $2^3 3^4$ non e' semplice.
* Si provi che un gruppo di ordine $2^3 3$ non e' semplice.