Esercizi algebra 7-12-10

(1) Sia $G = C_2 \times S_3$ il prodotto diretto di un gruppo ciclico e del gruppo simmetrico su tre oggetti. Si determini il sottogruppo derivato di G, la serie derivata di G, e si verifichi che il sottoguppo $N = C_2 \times \{1\}$ è normale in G ma non e' contenuto tra termini successivi della serie derivata.

(2) (7-1-10) Sia $f(x) = x^5 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
(a) Sia ε una radice di $f(x)$. Si determini il grado e una base dell'estensione di $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ su $\mathbb{Q}$.
(b) Sia ξ una radice primitiva quinta di 1. Si determini il grado di $\mathbb{Q}(\xi)$ su $\mathbb{Q}$.
(c) Si provi che il campo di riducibilità completa F di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}(\varepsilon, \xi)$.
(d) Si determini il grado $[F : \mathbb{Q}]$.
(e) Si provi che $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}(\xi)$.

(3) (7-1-10) Sia $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.
(a) Sia α una radice di $f(x)$. Si elenchino gli elementi dell'estensione $\mathbb{Z}_3(\alpha)$.
(b) Si trovi, se esiste, un generatore del gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_3(\alpha)$.

(4) (1-7-10) Nel campo complesso si considerino gli elementi $u = 1 + \sqrt[4]{3}$ e $v = 1 + i\sqrt[4]{3}$.
(a) Si trovino i polinomi minimi di u e v su $\mathbb{Q}$.
(b) Si provi che i campi $\mathbb{Q}(u)$ e $\mathbb{Q}(v)$ sono isomorfi.
(c) È vero che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(v)$?

(5) (1-7-10) a) Provare che il polinomio $x^3 + 5$ e' irriducibile in $F_7[x]$.
b) Sia $J = (x^3 + 5)$. Calcolare l'inverso, se esiste, dell'elemento $x + 1 + J$ nell'anello quoziente $F_7[x]/J$.
c) Costruire il campo F_{7^3} con 7^3 elementi, estensione di F_7.
d) Il gruppo moltiplicativo $F^*_{7^3}$ e' ciclico?
e) Si provi che $x^3 + 5$ è un fattore irriducibile di $x^{7^3} - x$ su $F_7[x]$

(6) Sia $f = x^6 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
(a) Si fattorizzi f come prodotto di polinomi irriducibili nell'anello $\mathbb{Q}[x]$.
(b) Sia F il campo di riducibilità completa di f su $\mathbb{Q}$. Si determini il grado di $[F : \mathbb{Q}]$.

(7) (21-9-10) Sia $u \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $g = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
(a) Si determini il polinomio minimo di g su $\mathbb{Q}$.
(b) Si verifichi che $u^2 - 2$ è una radice di g.
(c) Si dimostri che $\mathbb{Q}(u)$ è campo di spezzamento di g su $\mathbb{Q}$.

(8) Sia dato $u = \sqrt{5 - \sqrt{5}} \in \mathbb{C}$.
(a) Dimostrare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
(b) Determinare il polinomio minimo $f(x)$ di u su $\mathbb{Q}$, motivando la risposta.
(c) Determinare tutti gli zeri di $f(x)$ in $\mathbb{C}$.
(d) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(u)$?.
(e) Determinare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, motivando la risposta.
(f) Dire se $\mathbb{Q}(u)$ è un campo di spezzamento E per $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.
(g) Scrivere $1/u$ come combinazione lineare di $1, u, u^2, \ldots$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

(9) Sia dato $u = \sqrt{2 + \sqrt{6}} \in \mathbb{C}$.

(a) Dimostrare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
(b) Determinare il polinomio minimo $f(x)$ di u su $\mathbb{Q}$, e il grado dell'estensione $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$.
(c) Dire se $\mathbb{Q}(u)$ è un campo di spezzamento E per $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.
(d) Determinare il grado dell'estensione $E/\mathbb{Q}$.

(10) Si consideri il polinomio $f(x) = 7x^3 - 35 \in \mathbb{Z}[x]$.
(a) Fattorizzare $f(x)$ in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.
(b) Determinare il grado dell'estensione $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$ dove u è una radice di f.
(c) Si dica se $\mathbb{Q}(u^2) = \mathbb{Q}(u)$.
(d) Sia ϵ radice primitiva terza di 1, si dica se $\epsilon \in \mathbb{Q}(u)$.
(e) Dire se $\mathbb{Q}(u)$ è un campo di spezzamento E per $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ e fattorizzare f in $\mathbb{Q}(u)$.

(11) Si consideri il polinomio $f(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.
(a) Fattorizzare $f(x)$ in $\mathbb{F}_2[x]$.
(b) Sia α una radice di f, descrivere una base e gli elementi del campo $\mathbb{F}_2(\alpha)$.
(c) Si verifichi che α^2 è una radice di f.
(d) Dire se $\mathbb{F}_2(\alpha)$ è un campo di spezzamento per $f(x)$ su $\mathbb{F}_2$.

(12) Si consideri il polinomio $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$. Sia α una radice di f in una opportuna estensione di $\mathbb{F}_5$.
(a) Descrivere una base e gli elementi del campo $\mathbb{F}_5(\alpha)$.
(b) Trovare l'inverso di $3 + \alpha$ in $\mathbb{F}_5(\alpha)$.

(13) Si considerino i due ideali $I = (x^3 + x^2 + 1)$ e $J = (x^3 + x + 1)$ di $R = \mathbb{Z}_2[x]$. Si dica se gli anelli quoziente R/I e R/J sono campi e se sono isomorfi tra loro.