Algebra e Geometria
Primo appello, 16 dicembre 2011 - Tema A
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Per ogni numero reale t si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ -2 & -t & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è invertibile.
(b) Si calcoli l'inversa per $t = 0$.

2. Sia A_s la matrice

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_s .
(b) Si dica per quali valori di s la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(c) Si dica per quali valori di s la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
(d) Si dica per quali valori del parametro s la matrice è ORTOGONALMENTE diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e per tali valori si determini una matrice P ORTOGONALE tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

3. Sia dato il sistema lineare, dipendente dal parametro $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - bx_2 + 2x_3 & = & 0, \\ x_1 - 2bx_2 + bx_3 & = & -1, \\ x_1 + bx_2 + 4x_3 & = & 2, \end{cases}$$

- (a) Per ogni $b \in \mathbb{R}$ si determini il numero di soluzioni del sistema.
(b) Si calcolino le soluzioni APPROSSIMATE del sistema per $b = 0$.

4. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, con V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

- (a) Si provi che $\text{Ker } f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
(b) Si provi che la funzione f è iniettiva se e solo se $\text{Ker } f = \{0\}$.

Svolgere su fogli a parte.

5. Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 21X \equiv 14 \pmod{49} \\ 52X \equiv 65 \pmod{39} \\ 55X \equiv 33 \pmod{22} \end{cases}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Z}$.

6. Sia data la funzione

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto z\bar{z} + 1 \end{aligned}$$

- (a) Determinare l'immagine $f(\mathbb{C})$ di f .
- (b) Sia $\mathbb{R}_{\geq 5} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$ e sia $f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 5})$ la controimmagine di $\mathbb{R}_{\geq 5}$. Dire se il numero complesso $z = \frac{(3-i)}{(1+3i)}$ appartiene a $f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 5})$.
- (c) Si dica se la relazione ρ , definita su $\mathbb{C}$ da: $z\rho w$ se $f(z) = f(w)$ è una relazione di equivalenza.

7. Siano dati i punti $P(0, 1, -2)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(-1, 3, 1)$

- (a) Si determinino equazioni parametriche del piano π passante per i punti P , Q ed R .
- (b) Si determinino un vettore v ortogonale al piano π e un'equazione cartesiana di π .
- (c) Si dica se la retta r di equazioni parametriche

$$x = 2 - t; \quad y = -1 + 2t, \quad z = 3t, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

è parallela al piano π .