

Algebra e Geometria
Primo appello, 16 dicembre 2011
Tema B

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Per ogni numero reale s si consideri la matrice

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 2s & 1 & 1 \\ -2 & s & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si dica per quali $s \in \mathbb{R}$ la matrice A_s è invertibile.
- (b) Si calcoli l'inversa per $s = 0$.

2. Sia A_t la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_t .
- (b) Si dica per quali valori di t la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- (c) Si dica per quali valori di t la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
- (d) Si dica per quali valori del parametro t la matrice è ORTOGONALMENTE diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e per tali valori si determini una matrice P ORTOGONALE tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

3. Sia dato il sistema lineare, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - ax_3 & = & 0, \\ x_1 + ax_2 - 2ax_3 & = & -1, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 & = & 2, \end{cases}$$

- (a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si determini il numero di soluzioni del sistema.
- (b) Si calcolino le soluzioni APPROSSIMATE del sistema per $a = 0$.

4. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, con V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

- (a) Si provi che $\text{Im} f$ è sottospazio vettoriale di W .
- (b) Si provi che se i vettori $v_1, \dots, v_n$ generano V allora i vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\text{Im} f$.

Svolgere su fogli a parte.

5. Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 15X \equiv 10 \pmod{35} \\ 44X \equiv 55 \pmod{33} \\ 65X \equiv 39 \pmod{26} \end{cases}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Z}$.

6. Sia data la funzione

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto z\bar{z} - 3 \end{aligned}$$

- (a) Determinare l'immagine $g(\mathbb{C})$ di g .
 - (b) Sia $\mathbb{R}_{\geq 6} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$ e sia $g^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 6})$ la controimmagine di $\mathbb{R}_{\geq 6}$. Dire se il numero complesso $z = \frac{(3+i)}{(1-3i)}$ appartiene a $g^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 6})$.
 - (c) Si dica se la relazione ρ , definita su $\mathbb{C}$ da: $z\rho w$ se $g(z) = g(w)$ è una relazione di equivalenza.
7. Siano dati i punti $P(0, -2, 1)$, $Q(-1, 1, 3)$ e $R(1, 1, 1)$,
- (a) Si determinino equazioni parametriche del piano σ passante per i punti P , Q ed R .
 - (b) Si determinino un vettore v ortogonale al piano σ e un'equazione cartesiana di σ .
 - (c) Si dica se la retta s di equazioni parametriche

$$x = 2 - a; \quad y = 3a; \quad z = -1 + 2a, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

è parallela al piano σ .