**Algebra e Geometria**
**Primo appello, 16 dicembre 2011 - Tema C**

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Per ogni numero reale $t$ si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A_t$ è invertibile.

   (b) Si calcoli l'inversa per $t = 0$.

2. Sia $A_s$ la matrice

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2s & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare gli autovalori di $A_s$.

   (b) Si dica per quali valori del parametro $s$ la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

   (c) Si dica per quali valori del parametro $s$ la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

   (d) Si dica per quali valori del parametro $s$ la matrice è ORTOGONALMENTE diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ e per tali valori si determini una matrice $P$ ORTOGONALE tale che $P^{-1}A_sP$ sia diagonale.

3. Sia dato il sistema lineare, dipendente dal parametro $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + cx_3 & = 0, \\ x_1 - cx_2 + 2cx_3 & = -1, \\ x_1 + 2x_2 - cx_3 & = 2, \end{cases}$$

   (a) Per ogni $c \in \mathbb{R}$ si determini il numero di soluzioni del sistema.

   (b) Si calcolino le soluzioni APPROSSIMATE del sistema per $c = 0$.

4. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con $V$ e $W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

   (a) Si provi che $\mathrm{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

   (b) Si provi che la funzione $f$ è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.

**Svolgere su fogli a parte.**

5. Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 24X & \equiv 16 \bmod 56 \\ 28X & \equiv 35 \bmod 21 \\ 45X & \equiv 27 \bmod 18 \end{cases}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Z}$.

6. Sia data la funzione

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{C} & \to \mathbb{R} \\ z & \mapsto z\overline{z} + 5 \end{aligned}$$

   (a) Determinare l'immagine $h(\mathbb{C})$ di $h$.

   (b) Sia $\mathbb{R}_{\leq 7} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\}$ e sia $h^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 7})$ la controimmagine di $\mathbb{R}_{\leq 7}$. Dire se il numero complesso $z = \frac{(1-3i)}{(1+3i)}$ appartiene a $h^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 7})$.

   (c) Si dica se la relazione $\rho$, definita su $\mathbb{C}$ da: $z\rho w$ se $h(z) = h(w)$ è una relazione di equivalenza.

7. Siano dati i punti $P(1, -1, 3)$, $Q(-2, 0, 1)$, e $R(1, 1, 1)$.

   (a) Si determinino equazioni parametriche del piano $\pi$ passante per i punti $P$, $Q$ ed $R$.

   (b) Si determinino un vettore $v$ ortogonale al piano $\pi$ e un'equazione cartesiana di $\pi$.

   (c) Si dica se la retta $s$ di equazioni parametriche

$$x = 2 + 3b; \quad y = -b; \quad z = -5 + 2b, \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

   è parallela al piano $\pi$.