Algebra e Geometria
Primo appello, 16 dicembre 2011 - Tema D
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Per ogni numero reale r si consideri la matrice
$$A_r = \begin{pmatrix} 2r & 2 & 0 \\ r & 1 & 1 \\ -1 & r & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Si dica per quali $r \in \mathbb{R}$ la matrice A_r è invertibile.
   (b) Si calcoli l'inversa per $r = 0$.

2. Sia A_s la matrice
$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare gli autovalori di A_s.
   (b) Si dica per quali valori di s la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   (c) Si dica per quali valori di s la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
   (d) Si dica per quali valori di s la matrice è ORTOGONALMENTE diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ e per tali valori si determini una matrice P ORTOGONALE tale che $P^{-1}A_sP$ sia diagonale.

3. Sia dato il sistema lineare, dipendente dal parametro $d \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x_1 + dx_2 + 2x_3 & = 0, \\ -x_1 - 2dx_2 + dx_3 & = 1, \\ x_1 - dx_2 + 4x_3 & = 2, \end{cases}$$
   (a) Per ogni $d \in \mathbb{R}$ si determini il numero di soluzioni del sistema.
   (b) Si calcolino tutte le soluzioni APPROSSIMATE del sistema per $d = 0$.

4. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Si provi che $\mathrm{Im} f$ è sottospazio vettoriale di W.
   (b) Si provi che se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ generano V allora i vettori $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ generano $\mathrm{Im} f$.

Svolgere su fogli a parte.

5. Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 33X & \equiv 22 \bmod 77 \\ 36X & \equiv 45 \bmod 27 \\ 35X & \equiv 21 \bmod 14 \end{cases}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Z}$.

6. Sia data la funzione

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto z\overline{z} + 4 \end{aligned}$$

   (a) Determinare l'immagine $g(\mathbb{C})$ di g.

   (b) Sia $\mathbb{R}_{\leq 9} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9\}$ e sia $g^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 9})$ la controimmagine di $\mathbb{R}_{\leq 9}$. Dire se il numero complesso $z = \frac{(3-i)}{(1+3i)}$ appartiene a $g^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 9})$.

   (c) Si dica se la relazione ρ, definita su $\mathbb{C}$ da: $z\rho w$ se $g(z) = g(w)$ è una relazione di equivalenza.

7. Siano dati i punti $P(1, 1, 1)$; $Q(3, -1, 1)$ ed $R(1, 0, -2)$.

   (a) Si determinino equazioni parametriche del piano σ passante per i punti P, Q ed R.

   (b) Si determinino un vettore v ortogonale al piano σ e un'equazione cartesiana di σ.

   (c) Si dica se la retta r di equazioni parametriche

$$x = 2 + 2s; \quad y = 6 - s; \quad z = 3s, \text{ con } s \in \mathbb{R}$$

   è parallela al piano σ.