

Algebra e Geometria
Appello di recupero, 18 Settembre 2012
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Data la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- (a) si stabilisca per quali valori del parametro k la matrice A_k risulta invertibile;
- (b) si calcoli l'inversa di A_k per $k = 1$.

2. Sia $V \leq \mathbb{R}^4$ l'insieme definito come

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid a - c + d = 0 \right\}.$$

- (a) Si provi che V è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
- (b) Determinare la dimensione e una base di V .
- (c) Determinare una base ortogonale di V .
- (d) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente la base trovata nel punto precedente.

3. Al variare di $s \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice A_s

$$A_s = \begin{bmatrix} (s+1) & s & 0 \\ -s & 2 & s \\ 3s & s & -2s+1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determinare i valori di $s \in \mathbb{R}$ per i quali $[1, 0, 1]^T$ è autovettore di A_s .
- (b) Stabilire per quali valori di s la matrice A_s è diagonalizzabile (si consiglia di usare l'autovalore del punto precedente..).
- (c) Per $s = -1$ determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_{-1}P$ sia diagonale.
- (d) Determinare i valori di $s \in \mathbb{R}$ per i quali tutti gli autospazi di A_s sono tra loro ortogonali.

4. Sia A una matrice $n \times n$.

- (a) Si dia la definizione di autovettore per la matrice A .
- (b) Sia v un autovettore di A e sia w un vettore di $\mathbb{R}^n$ ortogonale a v . Dimostrare per induzione su n che $A^n v$ è ortogonale a w per ogni $n \geq 1$.

Svolgere su fogli a parte.

5. Siano dati i numeri 210 e 33.

- (a) Determinare tramite l'algoritmo euclideo $MCD(210, 33)$ e due interi x ed y tali che

$$MCD(210, 33) = 210x + 33y.$$

(Controllare il risultato).

- (b) Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ della congruenza $210X \equiv 3 \pmod{33}$.

6. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

- (a) Scrivere

$$z = \frac{16 - 8i}{2 + 2i} + \overline{(1 - 6i)}$$

nella forma $a + ib$.

- (b) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^6 = 1$.

7. Siano dati il punto $P(1, 0, -2)$ ed il vettore $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

- (a) Si determinino equazioni cartesiane della retta r passante per P e parallela a v ;
- (b) Si dica se il punto $Q(7, 10, -4)$ appartiene alla retta r e si determini la distanza minima del punto Q dalla retta r ;