Algebra e Geometria
Terzo appello, 19 marzo 2012 - Tema A
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Si discuta il seguente sistema lineare nelle incognite $x; y; z$, indicando il rango della matrice completa e della matrice incompleta, al variare del parametro reale a. Lo si risolva nel caso in cui ci sono infinite soluzioni:
$$\begin{cases} x & +ay & +2z & = 3 \\ -x & +y & +8z & = 7a \\ 2x & +y & -z & = a \end{cases}$$

2. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1, \ v_2, \ v_3, \ v_4$
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determinare una base di V.
   (b) Determinare una base del complemento ortogonale $V^\perp$ di V.
   (c) Determinare la proiezione del vettore $w = [1\ 0\ 0\ 0]^T$ su V.

3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice A_t
$$A_t = \begin{bmatrix} 2 & 2t-2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determinare gli autovalori di A_t.
   (b) Si dica per quali valori di t la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   (c) Per $t = 1$ determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_1P$ sia diagonale.
   (d) Calcolare $P^{-1}(A_1)^{10}P$ (senza fare conti).

4. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$.
   (a) Si dia la definizione di autovalore di A.
   (b) Sia λ un autovalore di A; si provi che l'insieme $E_\lambda(A)$ degli autovettori associati a λ e il vettore nullo, e' sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{R}^n$.
   (c) Si provi che se la matrice A è simmetrica, allora autovettori associati ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.
   (d) Si dimostri per induzione su $n \geq 1$ che se v è un autovettore per la matrice A di autovalore λ allora v è un autovettore per la matrice A^n di autovalore λ^n.

Svolgere su fogli a parte.

5. Siano dati i numeri 24 e 560.

   (a) Si calcoli $d = MCD(24, 560)$ mediante l'algoritmo di Euclide e si calcolino x, $y \in \mathbb{Z}$ tali che $d = 24x + 560y$.

   (b) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni della congruenza $24X \equiv 32 \text{mod}\, 560$.

   (c) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 24X & \equiv 32 \bmod 560 \\ 7X & \equiv 8 \bmod 3 \end{cases}$$

6. Siano dato il punto $P(1, -2, 1)$, ed il vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto P e parallela a v.

   (b) Si determini il piano π passante per l'origine ed ortogonale alla retta r.

   (c) Si dica se la retta r interseca il piano π ed in caso affermativo, si determinino i punti di intersezione.