Algebra e Geometria 2
Primo Appello, 22 giugno 2007 - Tema B

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1,\ u_2,\ u_3$ dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare una base di U.

   (b) Determinare una base ortonormale di U.

   (c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ su U.

Svolgimento

(a) Considero la matrice A che ha per colonne i vettori u_1, u_2, u_3; il rango di A e' 2 e i pivots sono sulla prima e sulla seconda colonna quindi una base di $U = span(u_1, u_2, u_3)$ e' data da u_1, u_2.

(b) Con il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base $u_1,\ u_2$ di U ottengo i vettori

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2 - \frac{< u_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 = u_2 + v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(e controllo che v_2 sia ortogonale a v_1) quindi una base ortonormale di U e' data dai vettori $v_1/\sqrt{2}, v_2/\sqrt{3}$.

(c) Dalla formula per la proiezione ortogonale ho:

$$\begin{aligned} P_U(v) &= < v, v_1/\sqrt{2} > v_1/\sqrt{2} + < v, v_2/\sqrt{3} > v_2/\sqrt{2} \\ &= \frac{< v, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 + \frac{< v, v_2 >}{< v_2, v_2 >} v_2 \\ &= \frac{2}{2} v_1 + \frac{3}{3} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(controllo che $v - P_U(v) \in U^{\perp}$).

2. Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V e sia λ un autovalore di T.

   (a) Lo scalare λ^2 è autovalore di $T^2 = T \circ T$?

   (b) Si provi che $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ e' un sottospazio vettoriale di V.

   (c) Si provi che se v è un autovettore di T relativo a λ e $\lambda \neq 0$, allora v appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

   (d) Si provi con un controesempio che se invece v è un autovettore di T relativo a $\lambda = 0$, allora non necessariamente v appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

   Svolgimento

   (a) Sia v un autovettore di T relativo all'autovalore λ, allora $v \neq 0$ e $T(v) = \lambda v$ quindi

   $$(T \circ T)(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$$

   pertanto λ^2 e' autovalore di T^2.

   (b) Dalla definizione di V_λ si ha che $0 \in V_\lambda$ quindi V_λ e' un insieme non vuoto. Se $v, w \in V_\lambda$, poiche' T e' applicazione lineare, si ha

   $$T(v + w) = T(v) + T(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w)$$

   quindi $v + w \in V_\lambda$. Se a e' uno scalare e $v \in V_\lambda$ allora

   $$T(av) = aT(v) = a\lambda v = \lambda(av)$$

   quindi $av \in V_\lambda$.

   (c) Da $T(v) = \lambda v$, dividendo per $\lambda \neq 0$ si ha $v = \frac{1}{\lambda}T(v) = T(\frac{1}{\lambda}v)$ quindi $v \in Im(T)$.

   (d) Sia $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo che manda ogni vettore nel vettore nullo. Allora $Im(T) = \{0\}$. Preso un vettore non nullo v, ad esempio $v = (1, 0)^T$, si ha che $T(v) = 0 = 0v$ quindi v e' autovettore associato all'autovalore 0 ma $v \notin Im(T)$.

3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Fissata una matrice $B \in V$ definiamo

   $$W = \{A \in V \mid AB = BA\}.$$

   (a) Si provi che W è sottospazio vettoriale di V.

   (b) Sia $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; determinare una base e la dimensione di W.

   Svolgimento

(a) La matrice nulla 0 appartiene a W perche' $0B = B0 = 0$, quindi W e' un insieme non vuoto. E' in insieme chiuso per la somma perche' se $A, C \in W$ allora, per le proprieta' distributive della somma di matrici rispetto al prodotto, si ha

$$(A + C)B = AB + CB = BA + BC = B(A + C)$$

quindi $A + B \in W$. Inoltre se $a \in \mathbb{R}$ e $A \in W$ allora $(aA)B = a(AB) = a(BA) = B(aA)$ quindi $aA \in W$. Poiche' W e' un insieme non vuoto chiuso per la somma e per il prodotto per scalare definiti in V, allora W e' sottospazio vettoriale di V.

(b) Presa una generica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si vede che $AB = BA$ se e solo se $a = d$ e $c = -b$ quindi

$$W = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\} = Span(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$$

e poiche' ogni elemento di W si scrive in modo unnico come combinazione lineare della matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, queste formano una base di W. Di conseguenza, la dimensione di W e' 2.

4. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$ più il polinomio nullo. Si consideri la mappa T da V in V che al polinomio $p(x)$ associa il polinomio

$$T(p(x)) = xp'(x) + p''(x)$$

(a) Si provi che T é un'applicazione lineare.

(b) Determinare $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Ker}(T)$ e le loro dimensioni.

Svolgimento

(a) Presi due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ in V, per le proprieta' della derivazione, si ha

$$\begin{aligned} T((p + q)(x)) &= x(p + q)'(x) + (p + q)"(x) \\ &= x(p'(x) + q'(x)) + (p"(x) + q"(x)) \\ &= (xp'(x) + p"(x)) + (xq'(x) + q"(x)) \\ &= T(p(x)) + T(q(x)) \end{aligned}$$

e per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in V$ si ha

$$\begin{aligned} T((ap)(x)) &= x(ap)'(x) + (ap)"(x) = x(ap'(x)) + ap"(x) \\ &= a(xp'(x) + p"(x)) = aT(p(x)) \end{aligned}$$

quindi l'applicazione T e' lineare.

(b) Una base di V e' data dai polinomi $1, x, x^2, x^3$. La matrice A associata a T rispetto questa base e' la matrice le cui colonne sono le coordinate di $T(1), T(x), T(x^2), T(x^3)$ rispetto questa base, quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A e' 3, $Ker(A) = Span((1,0,0,0)^T)$ e $Im(A)$ e' generato dalla seconda, terza e quarta colonna di A; quindi $dim(Ker(T)) = 1$, $dim(Im(T)) = 3$, $Ker(T) = Span(1)$ e $Im(T) = Span(x, 2 + 2x^2, 6x + 3x^2)$.

5. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ t & 1 & -3 \\ t & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

dove t è un numero reale.

(a) Determinare gli autovalori di A.

(b) Determinare per quali valori del parametro t la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Svolgimento

(a) Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(x) = (-2-x)((1-x)^2 - 9) = (-2-x)(-2-x)(4-x)$, quindi gli autovalori di A sono -2 con molteplicita' algebrica 2, e' 4 con molteplicita' algebrica 1.

(b) Basta controllare che la dimensione dell'autospazio uguagli la molteplicita' algebrica per gli autovalori di molt. algebrica maggiore di 1; quindi per il solo autovalore -2. La dimensione dell'autospazio relativo a -2 e' $dim(V_{-2}) = 3 - rg(A - (-2)Id)$; risulta $dim(V_{-2}) = 2$ per $t = 0$, $dim(V_{-2}) = 1$ per $t \neq 0$, quindi A e' diagonalizzabile se e solo se $t = 0$.

6. Nello spazio vettoriale V siano U e W sottospazi con basi rispettivamente $\{u_1, \dots, u_r\}$ e $\{w_1, \dots, w_s\}$. Si dimostri che se $U \cap W = \{0\}$ allora $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$ è una base del sottospazio $U + W$.

Svolgimento Per prima cosa provo che la lista $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti. Sia

$$a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r + b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s = 0$$

una combinazione lineare nulla a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ dei vettori $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$. Allora il vettore

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r = b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s$$

appartiene all'intersezione $U \cap W = \{0\}$ quindi v e' il vettore nullo e in particolare $a_1u_1 + \cdots + a_ru_r = 0$ e $b_1w_1 + \cdots + b_sw_s = 0$. Poiche' $\{u_1, \ldots, u_r\}$ e $\{w_1, \ldots, w_s\}$ sono basi di sottospazi, in particolare sono insiemi di vettori linearmente indipendenti, quindi da $a_1u_1 + \cdots + a_ru_r = 0$ si ha che

$$a_1 = \cdots = a_r = 0$$

e da $b_1w_1 + \cdots + b_sw_s = 0$ si ha che

$$b_1 = \cdots = b_s = 0.$$

Questo prova che 'equazione $a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + b_1w_1 + \cdots + b_sw_s = 0$ ammette solo la soluzione nulla $a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_s = 0$, e quindi che i vettori $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ sono linearmente indipendenti.

Dal teorema delle dimensioni so che $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(W \cap U) = dim(U) + dim(W) = r + s$. Poiche' $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ sono esattamente $r+s$ vettori linearmente indipendenti, ho che $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ sono base di $U+W$. (Si poteva altrimenti verificare che $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ sono generatori di $U+W$ oppure verificare direttamente che ogni vettore di scrive in modo unico come combinazione lineare di $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$.)

7. Siano r ed s le rette di equazioni

$$r \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}, \qquad s \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

   (a) Si controlli che non sono parallele;
   (b) si scriva un'equazione cartesiana del piano α per r parallelo ad s;
   (c) si dica se r ed s sono complanari;
   (d) si calcoli la distanza di s dal piano α.

   Svolgimento

   (a) Le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases},$$

   Il vettore direttore di r e' $(1, 1, 1)^T$, quello di s e' $(-3, -1, 1)^T$, i due vettori non sono proporzionali, quindi le rette non sono paralele.

   (b) Le equazioni cartesiane di r sono

$$\begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases},$$

Il generico piano α per r ha equazione cartesiana $a(x-z-2)+b(y-z-1)=0$, $a,b \in \mathbb{R}$, cioe' $ax+by+(-a-b)z-2a-b=0$. Impongo la condizione che α sia parallelo ad s: $(-3)a+(-1)b+(1)(-a-b)=0$ quindi $b=-2a$. Per $a=1$ e $b=-2$ ottengo l'equazione di α:

$$x-2y+z=0$$

(c) Basta controllare che s non sia contenuta nel piano α: prendo un punto di s, ad esempio $P=(3,1,0)$ e verifico che $P \notin \alpha$, infatti $3-2+0 \neq 0$.

(d) Poiche s e' parallela al piano α, ogni punto di s ha la stessa distanza da α, quindi

$$d(s,\alpha)=d(P,\alpha)=\frac{|3-2+0|}{\sqrt{1+4+1}}=1/\sqrt{6}.$$