

**Algebra e Geometria**  
**Prima prova parziale - 28 Ottobre 2011**

**Tema A**

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3t + 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ t + 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) si calcoli il determinante di  $A$ ;
- (b) si stabilisca per quali valori del parametro  $t \in \mathbb{R}$  la matrice  $A$  risulta invertibile;
- (c) si calcoli l'inversa di  $A$  per  $t = -1$ ;

2. Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (s - 2)x_3 = s, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - sx_2 = 0, \end{cases}$$

- (a) Si dica quante soluzioni ammette il sistema al variare di  $s \in \mathbb{R}$ .
- (b) Si calcolino tutte le soluzioni del sistema per  $s = 1$ .

3. Sia  $A$  una matrice  $n \times n$ .

- (a) Si provi che se  $A^T = -A$  e  $n$  è dispari allora  $\det A = 0$
- (b) (difficile) Si dia un controesempio del punto (a) nel caso  $n$  pari (esibire una matrice tale che  $A^T = -A$  e  $\det A \neq 0$ ).

4. Sia  $x_0$  una soluzione del sistema lineare  $Ax = b$ , allora:

- (a) se  $x'$  è una qualsiasi soluzione del sistema omogeneo associato  $Ax = 0$  allora  $x_0 + x'$  è soluzione del sistema  $Ax = b$ ;
- (b) ogni soluzione del sistema  $Ax = b$  ha la forma  $x_0 + x'$  dove  $x'$  è una soluzione del sistema omogeneo associato.

**Svolgere su fogli a parte.**

5. Si dimostri per induzione che:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 3^n & \sum_{j=0}^{n-1} 3^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per ogni  $n \geq 1$ .

6. Siano date le applicazioni

$$\begin{array}{ll} h: \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - 4x + 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} f: \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 3x + 3 \end{array}$$

- (a) Dire se  $h$  è iniettiva, motivando la risposta. Determinare l'immagine  $h(\mathbb{R})$ .
  - (b) Determinare  $f \circ h$ . Dire se  $f \circ h$  è iniettiva, motivando la risposta.
  - (c) Sia  $\mathbb{R}_{\geq 3} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 3\}$ . Determinare la controimmagine  $h^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 3})$  di  $\mathbb{R}_{\geq 3}$  tramite  $h$ .
  - (d) Sia  $\rho$  la relazione definita su  $\mathbb{R}$  da  $x\rho y$  se  $f(x) \geq f(y)$ . Si dica se  $\rho$  è un ordinamento parziale.
7. Si determini, **mediante l'algoritmo di Euclide**, il massimo comun divisore tra 2700 e 550.