Algebra e Geometria
Prima prova parziale - 28 Ottobre 2011
Tema B
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ 2t-2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
   (a) si calcoli il determinante di A;
   (b) si stabilisca per quali valori del parametro t la matrice A risulta invertibile;
   (c) si calcoli l'inversa di A per $t = 1$;

2. Sia dato il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + x_3 = t+2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - (t+2)x_3 = 0, \end{cases}$$
   (a) Si dica quante soluzioni ammette il sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Si calcolino tutte le soluzioni del sistema per $t = -1$.

3. Sia x_0 una soluzione del sistema lineare $Ax = b$, allora:
   (a) se x' è una qualsiasi soluzione del sistema omogeneo associato $Ax = 0$ allora $x_0 + x'$ è soluzione del sistema $Ax = b$;
   (b) ogni soluzione del sistema $Ax = b$ ha la forma $x_0 + x'$ dove x' è una soluzione del sistema omogeneo associato.

4. Sia B una matrice $n \times n$.
   (a) Si provi che se $B^T = -B$ e n è dispari allora $\det B = 0$
   (b) (difficile) Si dia un controesempio del punto (a) nel caso n pari (esibire una matrice tale che $B^T = -B$ e $\det B \neq 0$).

Svolgere su fogli a parte.

5. Si dimostri per induzione che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} 2^j & 1 \end{bmatrix}$$

   per ogni $n \geq 1$.

6. Siano date le applicazioni

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 4x + 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x + 3 \end{aligned}$$

   (a) Dire se h è iniettiva, motivando la risposta. Determinare l'immagine $h(\mathbb{R})$.

   (b) Determinare $f \circ h$. Dire se $f \circ h$ è iniettiva, motivando la risposta.

   (c) Sia $\mathbb{R}_{\geq 3} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 3\}$. Determinare la controimmagine $h^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 3})$ di $\mathbb{R}_{\geq 3}$ tramite h.

   (d) Sia ρ la relazione definita su $\mathbb{R}$ da $x\rho y$ se $f(x) \geq f(y)$. Si dica se ρ è un ordinamento parziale.

7. Si determini, **mediante l'algoritmo di Euclide**, il massimo comun divisore tra 2700 e 550.