

Algebra e Geometria
Prima prova parziale - 28 Ottobre 2011
Tema C
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia B una matrice $n \times n$.
 - (a) Si provi che se $B^T = -B$ e n è dispari allora $\det B = 0$
 - (b) (difficile) Si dia un controesempio del punto (a) nel caso n pari (esibire una matrice tale che $B^T = -B$ e $\det B \neq 0$).
2. Sia x_0 una soluzione del sistema lineare $Ax = b$. Si dimostri che:
 - (a) se x' è una qualsiasi soluzione del sistema omogeneo associato $Ax = 0$ allora $x_0 + x'$ è soluzione del sistema $Ax = b$;
 - (b) ogni soluzione del sistema $Ax = b$ ha la forma $x_0 + x'$ dove x' è una soluzione del sistema omogeneo associato.

3. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3s-3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) si calcoli il determinante di A ;
 - (b) si stabilisca per quali valori del parametro $s \in \mathbb{R}$ la matrice A risulta invertibile;
 - (c) si calcoli l'inversa di A per $s = 1$;
4. Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2tx_3 &= t + 1, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0, \\ -x_1 + (t+1)x_2 &= 0, \end{cases}$$

- (a) Si dica quante soluzioni ammette il sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$.
 - (b) Si calcolino tutte le soluzioni del sistema per $t = -1$.

Svolgere su fogli a parte.

5. Si dimostri per induzione che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{j=0}^{n-1} 5^j \\ 0 & 5^n \end{bmatrix}$$

per ogni $n \geq 1$.

6. Siano date le applicazioni

$$\begin{array}{ll} g: \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - 6x + 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} h: \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x - 1 \end{array}$$

- (a) Dire se g è iniettiva, motivando la risposta. Determinare l'immagine $g(\mathbb{R})$.
 - (b) Determinare $h \circ g$. Dire se $h \circ g$ è iniettiva, motivando la risposta.
 - (c) Sia $\mathbb{R}_{\geq 5} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 5\}$. Determinare la controimmagine $g^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 5})$ di $\mathbb{R}_{\geq 5}$ tramite g .
 - (d) Sia ρ la relazione definita su $\mathbb{R}$ da $x\rho y$ se $h(x) \geq h(y)$. Si dica se ρ è un ordinamento parziale.
7. Si determini, **mediante l'algoritmo di Euclide**, il massimo comun divisore tra 810 e 165.