Algebra e Geometria
Prima prova parziale - 28 Ottobre 2011
Tema D
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia x_0 una soluzione del sistema lineare $Ax = b$. Si dimostri che:
   (a) se x' è una qualsiasi soluzione del sistema omogeneo associato $Ax = 0$ allora $x_0 + x'$ è soluzione del sistema $Ax = b$;
   (b) ogni soluzione del sistema $Ax = b$ ha la forma $x_0 + x'$ dove x' è una soluzione del sistema omogeneo associato.

2. Sia C una matrice $n \times n$.
   (a) Si provi che se $C^T = -C$ e n è dispari allora $\det C = 0$
   (b) (difficile) Si dia un controesempio del punto (a) nel caso n pari (esibire una matrice tale che $C^T = -C$ e $\det C \neq 0$).

3. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & t+2 & 1 \\ 1 & (2t+2) & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
   (a) si calcoli il determinante di A;
   (b) si stabilisca per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice A risulta invertibile;
   (c) si calcoli l'inversa di A per $t = -1$;

4. Sia dato il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2(s-1)x_3 = s, \\ -x_1 + sx_2 = 0, \end{cases}$$
   (a) Si dica quante soluzioni ammette il sistema al variare di $s \in \mathbb{R}$.
   (b) Si calcolino tutte le soluzioni del sistema per $s = 0$.

Svolgere su fogli a parte.

5. Si dimostri per induzione che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} 3^j & 3^n \end{bmatrix}$$

per ogni $n \geq 1$.

6. Siano date le applicazioni

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 7x + 12 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x + 1 \end{aligned}$$

(a) Dire se g è iniettiva, motivando la risposta. Determinare l'immagine $g(\mathbb{R})$.

(b) Determinare $f \circ g$. Dire se $f \circ g$ è iniettiva, motivando la risposta.

(c) Sia $\mathbb{R}_{\geq 12} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 12\}$. Determinare la controimmagine $g^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 12})$ di $\mathbb{R}_{\geq 12}$ tramite g.

(d) Sia ρ la relazione definita su $\mathbb{R}$ da $x \rho y$ se $f(x) \leq f(y)$. Si dica se ρ è un ordinamento parziale.

7. Si determini, **mediante l'algoritmo di Euclide**, il massimo comun divisore tra 1620 e 330.