Algebra e Geometria
Quarto appello, 3 luglio 2012
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V_t il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ al variare del parametro reale t:
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ t \\ -1 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1+t \end{bmatrix}.$$
   (a) Determinare la dimensione e una base di V_t al variare di t.
   (b) Dimostrare che esiste un valore t_1 del parametro t per il quale il vettore $w = [1\ 0\ 0\ 0]^T$ non appartiene a V_{t_1}.
   (c) Sia V_0 il sottospazio vettoriale corrispondente a $t = 0$. Determinare una base del complemento ortogonale $V_0^{\perp}$ di V_0.
   (d) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente le basi trovate nei punti precedenti.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice A_t
$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 4t+3 & 0 \\ 1-t & 0 & 2t \\ 0 & 2t & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Si dica per quali valori di t la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   (b) Si dica per quali valori di t la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
   (c) Esiste un valore reale t per cui la matrice sia ortogonalmente diagonalizzabile?
   (d) Posto $t = -4$, si provi che -1 è autovalore della matrice $(A_t)^2$, dove $(A_t)^2 = A_t \cdot A_t$.

3. (a) Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si dia la definizione di sottospazio vettoriale U di V.
   (b) Sia $v \in \mathbb{R}^n$ e
$$U = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid v \text{ è autovettore di } A\}.$$
   Si provi che U è sottospazio vettoriale di $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
   (c) Sia $n = 2$ e $v = [1, 0]^T$; si determini una base e la dimensione del sottospazio U definito sopra.

4. Sia T una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali V e W su un campo K. Siano $v_i \in V$ e $r_i \in K$ per $i = 1, \ldots, n$ con $n \geq 2$. Provare per induzione su n che $T(r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n) = r_1 T(v_1) + \ldots + r_n T(v_n)$.

Svolgere su fogli a parte.

5. Siano dati i numeri 28 e 98.
   (a) Si calcoli $d = MCD(28, 98)$ mediante l'algoritmo di Euclide e si calcolino $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $d = 28x + 98y$.
   (b) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni della congruenza $28X \equiv 42 \bmod 98$.
6. Si scriva il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$ in forma polare e si calcoli z^{27}.
7. Siano dati il punto $Q(2, 2, 6)$, ed il vettore $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   (a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per il punto Q e parallela a w.
   (b) Si determini un'equazione cartesiana del piano σ passante per l'origine $O(0, 0, 0)$ e parallelo alla retta s ed al vettore $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
   (c) Si determini la distanza della retta s dall'origine $O(0, 0, 0)$.