Algebra e Geometria
Secondo appello, 9 gennaio 2011 - Tema A
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia A la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determinare una base degli spazi col$A$ e null$A$.
   (b) Sapendo che $X_0 = [1\ 1\ 1\ 1]^T$ è una soluzione particolare del sistema $AX = b$, con $b \in \mathbb{R}^4$, determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = b$.

2. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ (colonne della matrice A dell'esercizio (1))
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   Determinare una base ortogonale di V.

3. Siano v e w vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$. Provare che se l'insieme $\{v, w\}$ è ortogonale allora è anche linearmente indipendente.

4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice A_t
$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 3 & (3-t) \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determinare gli autovalori di A_t.
   (b) Si dica per quali valori di t la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   (c) Per $t = 3$ determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.
   (d) Esiste un valore t per cui la matrice P del punto precedente può essere scelta ortogonale?

5. (a) Si scrivano le proprietà che deve soddisfare una trasformazione f tra due spazi vettoriali V e W, su un campo $\mathbb{K}$, per essere lineare.
   (b) Si consideri ora la trasformazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ definita da $f(A) = A - A^T$. Provare che f è lineare.
   (c) Si dica, motivando la risposta, se f è iniettiva.

Svolgere su fogli a parte.

6. Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 30X & \equiv 35 \bmod 65 \\ 64X & \equiv 32 \bmod 80 \\ 28X & \equiv 14 \bmod 42 \end{cases}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Z}$.

7. Si dimostri per induzione su $n \geq 1$ che

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Siano dati i punti $P(2,1,2)$, $Q(3,2,1)$ ed il vettore $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

   (a) Si determinino equazioni parametriche del piano π passante per i punti P, Q e parallelo a v.

   (b) Si determinino un vettore v' ortogonale al piano π e un'equazione cartesiana di π.

   (c) Si determini la distanza minima del punto $P'(5,6,1)$ dal piano π.