

**Algebra e Geometria**  
**Secondo appello, 9 gennaio 2011 - Tema D**  
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia  $A$  la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determinare una base degli spazi  $\text{col}A$  e  $\text{null}A$ .  
(b) Sapendo che  $X_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  è una soluzione particolare del sistema  $AX = b$ , con  $b \in \mathbb{R}^4$ , determinare tutte le soluzioni del sistema  $AX = b$ .
2. Sia  $V$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $v_1, v_2, v_3, v_4$  (colonne della matrice  $A$  dell'esercizio (1))

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare una base ortogonale di  $V$ .

3. Siano  $v$  e  $w$  vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$ . Provare che se l'insieme  $\{v, w\}$  è ortogonale allora è anche linearmente indipendente.
4. Al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , si consideri la matrice  $A_t$

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 2 & (2-t) \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determinare gli autovalori di  $A_t$ .  
(b) Si dica per quali valori di  $t$  la matrice è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .  
(c) Per  $t = 2$  determinare una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^{-1}AP$  sia diagonale.  
(d) Esiste un valore  $t$  per cui la matrice  $P$  del punto precedente può essere scelta ortogonale?
5. (a) Si scrivano le proprietà che deve soddisfare una trasformazione  $f$  tra due spazi vettoriali  $V$  e  $W$ , su un campo  $\mathbb{K}$ , per essere lineare.  
(b) Si consideri ora la trasformazione  $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$  definita da  $f(A) = A + A^T$ . Provare che  $f$  è lineare.  
(c) Si dica, motivando la risposta, se  $f$  è iniettiva.

**Svolgere su fogli a parte.**

6. Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 18X \equiv 21 \pmod{39} \\ 52X \equiv 26 \pmod{65} \\ 34X \equiv 17 \pmod{51} \end{cases}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare tutte le soluzioni del sistema in  $\mathbb{Z}$ .

7. Si dimostri per induzione su  $n \geq 1$  che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

8. Siano dati i punti  $P(2, -1, -3)$ ,  $Q(1, -2, -2)$  ed il vettore  $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

- (a) Si determinino equazioni parametriche del piano  $\pi$  passante per i punti  $P$ ,  $Q$  e parallelo a  $v$ .
- (b) Si determinino un vettore  $v'$  ortogonale al piano  $\pi$  e un'equazione cartesiana di  $\pi$ .
- (c) Si determini la distanza minima del punto  $R(1, 4, -6)$  dal piano  $\pi$ .