Insiemi ed applicazioni

Giovanna Carnovale

October 11, 2011

1 Insiemi

Con il termine insieme denoteremo una collezione di oggetti. Gli oggetti di questa collezione saranno chiamati elementi dell'insieme. Per segnalare che l'oggetto x è une elemento dell'insieme X, scriveremo $x \in X$. Di norma, il simbolo $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali $0, 1, 2, 3, \ldots$

Ci sono vari modi per descrivere un insieme. Ad esempio, l'insieme Y che ha come elementi $1, 2, 3$ può essere scritto come $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ ovvero, inserendo tra parentesi graffe, tutti i suoi elementi. Per descrivere invece l'insieme Z di tutti i numeri naturali multipli di 3 potremo scrivere:

$$Z = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

che però non è chiarissimo, oppure descriverlo dicendo quale è la proprietà che devono avere i suoi elementi. In questo caso diremo "Z è l'insieme degli elementi di $\mathbb{N}$ che si possono scrivere come $3m$ per qualche naturale m". In formule, scriveremo

$$Z = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3m \text{ per qualche } m \in \mathbb{N}\}$$

dove il simbolo $\mid$ si legge "tale che".

Per indicare che l'oggetto y non è un elemento dell'insieme X scriveremo $y \notin X$.

Supponiamo di avere due insiemi S e T. Diremo che S è un sottoinsieme di T (o che S è contenuto in T, o che S è incluso in T o che T contiene S), e scriveremo $S \subseteq T$ se tutti gli elementi di S sono anche elementi di T. In formule:

$$S \subseteq T \text{ se } \forall x \in S \text{ segue che } x \in T$$

dove il simbolo $\forall$ sta ad indicare "per ogni". La locuzione "segue che" può essere anche indicata con il simbolo $\Rightarrow$.

Esempio 1.1 *Se* $Y = \{1, 2, 3\}$*,* $Z = \{1, 2, 3, 5, 7, 13\}$ *e* $W = \{1, 3, 5, 7\}$ *valgono* $Y \subseteq Z$ *e* $W \subseteq Z$ *ma* Y *non è contenuto in* W *(in formule,* $Y \not\subseteq W$*).*

Due insiemi S e T si dicono uguali ($S = T$) se tutti gli elementi di S sono elementi di T e tutti gli elementi di T sono elementi di S. In altre parole, “$S = T$ se $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$”. Per indicare che due insiemi non sono uguali, useremo il simbolo $\neq$.

Esempio 1.2 *Se*

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\} \text{ e } T = \{y \in \mathbb{N} \mid y + 5 \geq 8\}$$

avremo $S = T$. Infatti, se prendo un elemento qualsiasi x di S allora $x \geq 3$ ma allora vale $x + 5 \geq 8$ quindi x soddisfa la condizione di appartenenza a T e pertanto $x \in T$. Perciò, $S \subseteq T$. Viceversa, se prendo un elemento qualsiasi $y \in T$, avremo $y + 5 \geq 8$, perciò $y \geq 3$ quindi y soddisfa la condizione di appartenenza a S e pertanto $y \in S$. Quindi, $T \subseteq S$. Ne segue che $S = T$.

Esempio 1.3 *L'insieme S dei multipli di 6 in $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme proprio dell'insieme Z dei multipli di 3 in $\mathbb{N}$. Abbiamo*

$$Z = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3m \text{ per qualche } m \in \mathbb{N}\}$$

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 6l \text{ per qualche } l \in \mathbb{N}\}$$

quindi, preso $x \in S$, so che esiste un l in $\mathbb{N}$ per il quale abbiamo $x = 6l = 3 \cdot 2l$. Prendendo $m = 2l \in \mathbb{N}$ vediamo che $x = 3m$ pertanto $x \in Z$. Il ragionamento vale per ogni $x \in S$ quindi $S \subseteq Z$. Non vale l'inclusione opposta perché $3 \in Z$ ma 3 non è un multiplo di 6 quindi $3 \notin S$.

Se vorremo sottolineare che un insieme S è contenuto in un altro insieme T ma è diverso da esso, ovvero, se $S \subseteq T$ ma $S \neq T$, diremo che S è contenuto propriamente in T, o che S è un sottoinsieme proprio di T e scriveremo $S \subsetneq T$.

L'insieme che non contiene alcun elemento è detto insieme *vuoto* e viene indicato con il simbolo $\emptyset$. Per convenzione, $\emptyset$ è contenuto in tutti gli insiemi.

Dati due insiemi A e B, potremo costruire la loro *intersezione*, ovvero l'insieme che contiene tutti e soli gli elementi di A che sono anche contenuti in B. In simboli, tale insieme verrà indicato con il simbolo $A \cap B$. Per costruzione, $A \cap B \subseteq A$ ed $A \cap B \subseteq B$. In formule, possiamo quindi descriverlo nei seguenti modi:

$$A \cap B = \{a \in A \mid a \in B\} = \{b \in B \mid b \in A\}$$

e avremo:
$x \in A \cap B$ se e solo se valgono le due condizioni “$x \in A$” e “$x \in B$”.

Vediamo che $A \cap B = B \cap A$ per ogni coppia di insiemi A e B. Se l'intersezione di due insiemi A e B è vuota, cioè se i due insiemi non hanno elementi comuni (in formule $A \cap B = \emptyset$), diremo che A e B sono insiemi *disgiunti*.

Esempio 1.4 *Dati gli insiemi dell'Esempio 1.1 avremo:*

$$Y \cap Z = Y; \quad Y \cap W = \{1, 3\}; \quad Z \cap W = W.$$

Dati due insiemi A e B, potremo inoltre costruire la loro *unione*, ovvero l'insieme che contiene tutti e soli gli elementi che appartengono ad A o a B (o ad entrambi). In simboli, tale insieme verrà indicato con il simbolo $A \cup B$. Per costruzione, $A \subseteq A \cup B$ ed $B \subseteq A \cup B$. Avremo:
$x \in A \cup B$ se e solo se vale almeno una delle due condizioni "$x \in A$", "$x \in B$".
Ne segue che $A \cup B = B \cup A$ per ogni coppia di insiemi A e B.

Esempio 1.5 *Dati gli insiemi dell'Esempio 1.1 avremo:*

$$Y \cup Z = Z; \quad Y \cup W = \{1, 2, 3, 5, 7\}; \quad Z \cup W = Z.$$

Dati due insiemi A e B, si può anche costruire la loro *differenza*, $A \setminus B$ ovvero l'insieme che contiene gli elementi che appartengono ad A ma non a B. Per costruzione, $(A \setminus B) \subseteq A$ ed $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$. In altre parole, abbiamo:
$x \in A \setminus B$ se e soltanto se valgono le due condizioni "$x \in A$", "$x \notin B$".
Da questo segue che $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Esempio 1.6 *Dati gli insiemi dell'Esempio 1.1 avremo:*

$$Y \setminus Z = \emptyset; \quad Y \setminus W = \{2\}; \quad Z \setminus W = \{2, 13\}.$$

$$Z \setminus Y = \{5, 7, 13\}; \quad W \setminus Y = \{5, 7\}; \quad W \setminus Z = \emptyset.$$

Esercizio 1.7 *Dimostrare che, dati tre insiemi A, B e C, valgono:*

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$*;*

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$*.*

Soluzione: 1. Per dimostrare che due insiemi sono uguali devo mostrare che il primo è contenuto nel secondo o viceversa, ovvero che vale la cosiddetta *doppia inclusione*. Sia x un qualsiasi elemento di $(A \cap B) \cap C$. Allora, $x \in A \cap B$ ed $x \in C$. Pertanto, valgono le tre condizioni $x \in A$, $x \in B$ e $x \in C$. Questo implica che $x \in A$ ed $x \in B \cap C$. Per definizione di intersezione applicata agli insiemi A e $B \cap C$, avremo $x \in A \cap (B \cap C)$. In altre parole, ogni elemento x di $(A \cap B) \cap C$ è un elemento di $A \cap (B \cap C)$, ovvero $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$. Consideriamo ora un qualsiasi elemento $y \in A \cap (B \cap C)$. Allora valgono le due condizioni $y \in A$ e $y \in B \cap C$. Quindi valgono, $y \in A$, $y \in B$ e $y \in C$. In altre parole, $y \in A \cap B$ e $y \in C$. Per definizione di intersezione applicata agli insiemi $A \cap B$ e C, abbiamo $y \in (A \cap B) \cap C$. Perciò abbiamo dimostrato anche che ogni elemento di $A \cap (B \cap C)$ appartiene a $(A \cap B) \cap C$. Avendo dimostrato quindi anche la seconda inclusione, possiamo concludere che $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

La parte 2. si risolve in modo analogo.

Come conseguenza dell'Esercizio 1.7 potremo omettere le parentesi quando vorremo indicare l'intersezione di una famiglia di insiemi o l'unione di una famiglia di insiemi.

Dati due insiemi A e B, si può infine costruire il loro *prodotto cartesiano*, $A \times B$ ovvero l'insieme i cui elementi sono le coppie *ordinate* (a, b) per le quali il primo termine a è un elemento di A ed il secondo termine b è un elemento di B. Due elementi $x = (a, b)$ ed $y = (a', b')$ di $A \times B$ coincidono se e solo se $a = a'$ e $b = b'$.

Esempio 1.8 *Dati gli insiemi dell'Esempio 1.1 avremo:*

$Y \times W = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,1),(2,3),(2,5),(2,7),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)\}.$

Esercizio 1.9 *Dati insiemi qualsiasi A, B, C, dimostrare le seguenti affermazioni*

1. *Se $A \subseteq B$ allora $A \cap B = A$ ed $A \cup B = B$.*
2. *Se $A \cap B = A$ allora $A \subseteq B$.*
3. *Se $A \cup B = B$ allora $A \subseteq B$.*
4. *Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ allora $A \subseteq C$.*
5. *Se $A \subseteq C$ e $A \subseteq B$ allora $A \subseteq B \cap C$.*
6. *Se $A \setminus B = A$ allora $A \cap B = \emptyset$.*
7. *Vale $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.*

2 Applicazioni

Con il termine *applicazione* (o *funzione*) dall'insieme A all'insieme B indicheremo una regola f che ad ogni elemento di A associa un preciso elemento di B. Si denota usualmente con i simboli $f\colon A \to B$. Se è chiaro dal contesto quali siano gli insiemi, scriveremo anche semplicemente l'applicazione f. L'elemento di B associato all'elemento a tramite la regola f sarà indicato con il simbolo $f(a)$. Esso è detto *l'immagine* di a tramite f. L'insieme A è detto *dominio* della funzione, mentre B è detto *codominio* di f. Due applicazioni f e g sono uguali se hanno lo stesso dominio, lo stesso codominio, e se *per ogni elemento a del dominio* abbiamo $f(a) = g(a)$. Il sottoinsieme di B che consiste di tutti gli elementi che sono immagine di qualche elemento di a tramite f è detto *immagine di f* o *immagine di A tramite f*. Di solito viene indicato con $f(A)$. In formule, avremo

$$f(A) = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\}$$

In altre parole, un elemento b di B appartiene ad $f(A)$ se riesco a trovare un elemento a di A per il quale valga $b = f(a)$.

Dato un qualsiasi sottoinsieme C di A, chiameremo immagine di C tramite f l'insieme degli elementi che sono immagine di qualche elemento di c tramite f. Di solito viene indicato con $f(C)$. In formule, avremo

$$f(C) = \{b \in B \mid b = f(c) \text{ per qualche } c \in C\}$$

In altre parole, un elemento b di B appartiene ad $f(C)$ se riesco a trovare un elemento c di C per il quale valga $b = f(c)$.

Ad esempio, se S è l'insieme dei numeri naturali pari e T è l'insieme dei naturali, possiamo considerare l'applicazione g che ad ogni elemento di S associa la sua metà. In formule scriveremo:

$$\begin{aligned} f\colon S &\to T \\ s &\mapsto \tfrac{1}{2}s \end{aligned}$$

che si legge “f è l'applicazione da S a T che all'elemento s (di S) associa l'elemento $\frac{1}{2}s$ di T. L'immagine di S consiste di tutto T perchè, dato un qualsiasi intero t, l'elemento $s = 2t \in S$ (perché è pari) e vale $f(s) = t$. L'immagine del sottoinsieme $\{2, 4, 6, 10\}$ di S è $\{1, 2, 3, 5\}$.

Esempio 2.1 *Siano dati* $S = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ *e* $T = \{a, b, c\}$ *e sia definita l'applicazione*

$$\begin{aligned} g\colon S &\to T \\ 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto a \\ 5 &\mapsto b \\ 6 &\mapsto c \\ 7 &\mapsto c \\ 8 &\mapsto c \end{aligned}$$

Allora $g(S) = \{a, b, c\}$. *Dati i sottoinsiemi* $C = \{1, 2\}$ *e* $D = \{1, 5, 6\}$ *di* S *avremo* $g(C) = \{g(1), g(2)\} = \{a\}$ *e* $g(D) = \{g(1), g(5), g(6)\} = \{a, b, c\} = T$.

Sia f un'applicazione da S a T. Dato un elemento $t \in T$ chiameremo *controimmagine* di t tramite T l'insieme di tutti gli elementi di S la cui immagine tramite f è t. Si denota usualmente con $f^{-1}(t)$. In formule:

$$f^{-1}(t) = \{s \in S \mid f(s) = t\}.$$

Se t non appartiene all'immagine, allora non esiste alcun s in S per il quale $f(s) = t$. In questo caso, $f^{-1}(t) = \emptyset$.

Analogamente, dato un sottoinsieme U di T chiameremo la *controimmagine* di U tramite T l'insieme di tutti gli elementi di S la cui immagine tramite f è un elemento di U. Di solito si indica con $f^{-1}(U)$. In formule:

$$f^{-1}(U) = \{s \in S \mid f(s) \in U\}.$$

Esempio 2.2 *Consideriamo l'esempio 2.1. La controimmagine di* b *è*

$$f^{-1}(b) = \{s \in S \mid f(s) = b\} = \{5\}.$$

La controimmagine di c *è*

$$f^{-1}(c) = \{s \in S \mid f(s) = c\} = \{6, 7, 8\}.$$

La controimmagine di $U = \{a, c\}$ *è*

$$f^{-1}(U) = \{s \in S \mid f(s) \in U\} = \{s \in S \mid f(s) \in \{a, c\}\} = \{1, 2, 6, 7, 8\}.$$

Date due applicazioni tali che *il codominio della prima coincida con il dominio della seconda* è possibile considerare la loro *composizione*. Essa sarà l'applicazione avente come dominio il dominio della prima, come codominio il codominio della seconda, e come regola, la concatenazione della prima e della seconda regola. In formule, se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ la loro composizione sarà l'applicazione $g \circ f\colon A \to C$ definita come $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ per ogni elemento a di A. Si faccia attenzione alla notazione: $g \circ f$ indica che eseguiremo *prima* f e *poi* g, perché applicheremo prima la funzione che è in notazione, più vicina alla variabile a di A.

Diremo che un'applicazione è *suriettiva* se la sua immagine coincide con il codominio. In altre parole, l'applicazione $f\colon S \to T$ è detta suriettiva se $f(S) = T$ ovvero se ogni elemento di T è immagine di un qualche elemento del dominio S. Quindi: per dimostrare che una funzione $f\colon S \to T$ è suriettiva, per ogni elemento t di T dovremo essere in grado di esibire una controimmagine, cioè un elemento $s \in S$ tale che $f(s) = t$. Viceversa, per dimostrare che una funzione $g\colon A \to B$ non è suriettiva, sarà sufficiente trovare *un* elemento b di B per il quale non esista alcun $a \in A$ per cui $g(a) = b$. L'applicazione dell' Esempio 2.1 è suriettiva. L'applicazione $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che ad ogni elemento associa il suo doppio *non* è suriettiva perché i numeri dispari non possono essere nell'immagine, non essendo il doppio di un numero naturale.

Proposizione 2.3 *La composizione di applicazioni suriettive è suriettiva.*

Dimostrazione: Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ suriettive. Sia c un qualsiasi elemento di C. Poiché g è suriettiva, esiste un elemento b di B tale che $g(b) = c$. Poiché f è suriettiva, esiste un elemento a di A tale che $f(a) = b$. Quindi, esiste $a \in A$ tale che $c = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ perciò $g \circ f$ è suriettiva. $\square$

Diremo che un'applicazione è iniettiva se ad elementi distinti del dominio corrispondono immagini distinte. In altre parole, $f\colon S \to T$ è iniettiva se l'uguaglianza $f(s) = f(s')$ con $s, s' \in S$ vale solo se $s = s'$. Quindi, se vogliamo dimostrare che una certa funzione f è iniettiva, dovremo mostrare che se supponiamo $f(s) = f(s')$ segue che $s = s'$. Se invece vogliamo dimostrare che una certa funzione $g\colon A \to B$ non è iniettiva, sarà sufficiente esibire due elementi *diversi* a, a' di A per i quali valga $g(a) = g(a')$. Ad esempio, l'applicazione $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per la quale $h(n) = 2n$ è iniettiva. Se supponiamo infatti che per $n, m \in \mathbb{N}$ vale $h(n) = h(m)$, allora avremo $2n = 2m$ e, dividendo per 2 (lecito perché si tratta di numeri pari), avremo $n = m$.

Invece, l'applicazione g dell'esempio 2.1 non è iniettiva perché $1 \neq 2$ ma $g(1) = a = g(2)$. Notiamo che dire che un'applicazione è iniettiva è equivalente a dire che la controimmagine di ogni elemento del codominio è vuota (se l'elemento non appartiene all'immagine), oppure consiste di un solo elemento.

Proposizione 2.4 *La composizione di applicazioni iniettive è iniettiva.*

Dimostrazione: Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ iniettive e siano a, a' due elementi di A tali che $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$, cioè $g(f(a)) = g(f(a'))$. Gli elementi $f(a)$ ed $f(a')$ appartengono a B e poiché g è iniettiva ne segue che $g(f(a)) = g(f(a'))$ può valere solo se $f(a) = f(a')$. Poiché f è iniettiva, ciò può accadere soloe se $a = a'$. Pertanto, $g \circ f$ è iniettiva. $\square$

Un'applicazione $f\colon S \to T$ si dice *biettiva* o *biunivoca* se è iniettiva e suriettiva. In questo caso, per ogni elemento t di T esiste ed è unico l'elemento s per il quale $f(s) = t$. Quando abbiamo un'applicazione biunivoca possiamo quindi definire un'applicazione $f^{-1}\colon T \to S$, detta *applicazione inversa* di f, tale che $f^{-1}(t)$ è proprio l'unico elemento $s \in S$ tale che $f(s) = t$. In altre parole $f^{-1}\colon T \to S$ è tale che $(f \circ f^{-1})(t) = t$ per ogni t di T e $(f^{-1} \circ f)(s) = s$ per ogni s di S.

Dato un insieme S, esiste sempre una applicazione, detta *applicazione identica* o *identità* indicata con il simbolo id o id_S se se ne vuole sottolineare il dominio che associa ad ogni elemento s l'elemento s stesso, ovvero $\mathrm{id}(s) = s$ per ogni $s \in S$. Essa è biunivoca e coincide con la sua inversa. Possiamo quindi descrivere l'applicazione inversa come l'applicazione $f^{-1}\colon T \to S$ tale che $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_T$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_S$. In generale un'applicazione $f\colon S \to T$ è detto *invertibile* se esiste un'applicazione $g\colon T \to S$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_T$ e $g \circ f = \mathrm{id}_S$. Abbiamo appena visto che ogni applicazione biunivoca è invertibile. L'applicazione g è detta la sua inversa.

Esercizio 2.5 *Sia $f\colon S \to T$ un'applicazione invertibile e sia $g\colon T \to S$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_T$ e $g \circ f = \mathrm{id}_S$. Dimostrare che se esiste un'altra applicazione $h\colon T \to S$ tale che $f \circ h = \mathrm{id}_T$ e $h \circ f = \mathrm{id}_S$ allora $g = h$.*

Ad esempio, l'applicazione

$$\begin{aligned} g\colon \{1,2,3\} &\to \{a,b,c\} \\ 1 &\mapsto c \\ 2 &\mapsto b \\ 3 &\mapsto a \end{aligned}$$

è biunivoca e la sua inversa è

$$\begin{aligned} g^{-1}\colon \{a,b,c\} &\to \{1,2,3\} \\ a &\mapsto 3 \\ b &\mapsto 2 \\ c &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Sia ora $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e sia

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x+1 \end{aligned}$$

allora h è iniettiva perché se $h(x) = h(y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$, vale $2x + 1 = 2y + 1$, quindi anche $2x = 2y$ e, dividendo per 2 (lecito perché siamo nei reali) avremo $x = y$. Perciò $h(x) = h(y)$ vale solo se $x = y$.

L'applicazione h è anche suriettiva perché se prendo un qualsiasi elemento $r \in \mathbb{R}$ avremo come $r = h(s)$ per $s = \frac{r-1}{2}$. Infatti, $h(\frac{r-1}{2}) = 2\frac{r-1}{2} + 1 = r - 1 + 1 = r$. Perciò h è suriettiva e la sua inversa è

$$\begin{aligned} h^{-1}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{x-1}{2} \end{aligned}$$

Dalle proposizioni dimostrate sopra deduciamo che la composizione di applicazioni biettive è biettiva.

Proprietà

- Date $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ e $h\colon C \to D$, le due possibili funzioni composte $(h\circ g)\circ f\colon A \to D$, (ottenuta componendo prima g con h e poi componendo f con il risultato) e $h\circ(g\circ f)\colon A \to D$ (ottenuta componendo prima f con g e poi componendo il risultato con h) coincidono percé hanno lo stesso dominio, lo stesso codominio, e per ogni a di A vale $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h((g \circ f)(a)) = h \circ (g \circ f)(a)$.

- Date $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, se $g \circ f\colon A \to C$ è suriettiva allora g è suriettiva. Infatti, poiché $g \circ f$ è suriettiva, sappiamo che per ogni $c \in C$ esiste $a \in A$ tale che $g(f(a)) = c$. Quindi, per ogni $c \in C$ sappiamo che esiste almeno l'elemento $b = f(a)$ di B tale che $g(b) = c$.

- Date $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, se $g \circ f\colon A \to C$ è iniettiva, allora f è iniettiva. Infatti, se avessimo $f(a) = f(a')$ per qualche a, $a' \in A$, avremmo $g(f(a)) = g(f(a'))$ ma poiché $(g\circ f)$ è iniettiva ciò è possibile solo se $a = a'$.

- Una funzione è biunivoca se e e solo se è invertibile. Infatti abbiamo già visto che ogni applicazione biunivoca è invertibile. Ora vogliamo mostrare il viceversa. Sia $f\colon S \to T$ invertibile e sia $g\colon T \to S$ la sua inversa. Poiché $g \circ f = \mathrm{id}_S$ è iniettiva, dai punti precedenti deduciamo che f è iniettiva. Poiché $f \circ g = \mathrm{id}_T$ è suriettiva, dai punti precedenti deduciamo che f è anche suriettiva.

Esercizio 2.6

1. *Dati un'applicazione $f\colon A \to B$ e due sottoinsiemi $C, D \subseteq A$ dimostrare che $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.*

2. *Sia data l'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + 1$. Dire se è iniettiva, suriettiva, biettiva, motivando la risposta. Sia $X = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$. Determinare $f(X)$. Determinare anche $f^{-1}(X)$.*

3. *Sia data l'applicazione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3x + 2$. Dire se è iniettiva, suriettiva, biettiva, motivando la risposta. Se è iniettiva, determinare l'applicazione inversa.*

4. *Siano date le applicazioni $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ determinata da $f(x) = \sqrt{x} - 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinata da $g(y) = y^2 - 2$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Determinare l'applicazione composta $g \circ f$. Dire se si tratta di una applicazione iniettiva.*