

Razionali, Reali, Complessi

Giovanna Carnovale

November 14, 2011

1 I numeri razionali

Abbiamo visto che in $\mathbb{Z}$ tutte le equazioni della forma $X + a = b$ con a e b in $\mathbb{Z}$ ammettono soluzione. D'altra parte, le equazioni della forma $aX = b$ con $a \neq 0$ ammettono soluzione in $\mathbb{Z}$ se e soltanto se $a|b$, per definizione di divisore. Introduciamo allora l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Gli elementi di questo insieme hanno la forma: $\pm \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{N}$ ed $n \in \mathbb{N}$, con le operazioni note di somma e prodotto.

L'insieme $\mathbb{Q}$ può essere costruito come insieme quoziente per la relazione di equivalenza definita sugli elementi di $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ come segue:

$$(m, n) \sim (r, s), \quad \text{se e solo se} \quad ms = rn.$$

Le operazioni di somma e prodotto sono definite in tale caso come:

$$[(m, n)] + [(r, s)] = [(ms + nr, ns)], \quad [(m, n)] \cdot [(r, s)] = [(mr, ns)].$$

La "frazione" $\frac{m}{n}$ corrisponderà allora alla classe della coppia (m, n) .

Esercizio 1.1 *Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Verificare che le operazioni di somma e prodotto sono ben definiti sull'insieme quoziente, ovvero non dipendono dalla scelta del rappresentante della classe di equivalenza.*

Tutte le equazioni del tipo $aX = b$, con $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{Q}$ ammettono soluzione in $\mathbb{Q}$, ovvero: se $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e se $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ allora la soluzione è $a^{-1}b = \frac{nr}{ms}$.

Anche $\mathbb{Q}$ è un insieme totalmente ordinato, con ordinamento dato da $\leq$. Diremo che $x \leq 0$ se esso corrisponde alla classe di una coppia (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}$ e $ab \leq 0$. Diremo allora che $x \leq y$ se $x - y \leq 0$. Poiché $\mathbb{Q}$ contiene $\mathbb{Z}$, che non gode della proprietà del buon ordinamento, neanche $\mathbb{Q}$ gode di tale proprietà.

Osservazione 1.2 *Neanche l'insieme $\mathbb{Q}^+$ dei numeri razionali positivi, che è un insieme ordinato, gode della proprietà di buon ordinamento. E' sufficiente osservare che $\mathbb{Q}^+$ stesso non possiede un minimo. Se per assurdo esistesse un minimo $r \in \mathbb{Q}^+$, allora $r \leq x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}^+$. Ma $\frac{1}{2}r \leq r$, $\frac{1}{2}r \neq r$ e $\frac{1}{2}r \in \mathbb{Q}^+$, assurdo.*

La somma, il prodotto e l'ordinamento in $\mathbb{Q}$ godono delle seguenti proprietà:

1. $a + b = b + a$ per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$ (proprietà commutativa della somma);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (proprietà associativa della somma);
3. $0 + a = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ (esistenza dell'elemento neutro per la somma);
4. per ogni $a \in \mathbb{Q}$ esiste $b = (-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + b = 0$ (esistenza dell'elemento opposto);
5. $a(b + c) = ab + ac$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (proprietà distributiva);
6. $(ab)c = a(bc)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (proprietà associativa del prodotto);
7. $ab = ba$ per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$ (proprietà commutativa del prodotto);
8. $1a = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ (esistenza dell'elemento neutro per il prodotto);
9. dati $a, b \in \mathbb{Q}$, se $ab = 0$ allora $a = 0$ oppure $b = 0$ ($\mathbb{Q}$ è privo di divisori dello zero);
10. Per ogni $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ esiste $b \in \mathbb{Q}$ tale che $ab = 1$ (tutti gli elementi *non nulli* di $\mathbb{Q}$ sono invertibili);
11. per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \geq b$ se e solo se $a + c \geq b + c$ per ogni $c \in \mathbb{Q}$ (compatibilità dell'ordine con la somma);
12. Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x < y$ esiste $z \in \mathbb{Q}$ con $x < z < y$ (proprietà di densità di $\mathbb{Q}$);
13. per ogni $a \in \mathbb{Q}$ con $a \neq 0$, $a > 0$ se e solo se $a^{-1} > 0$;
14. per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \geq b$ se e solo se $ac \geq bc$ per ogni $c \in \mathbb{Q}$ con $c > 0$;
15. per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \geq b$ se e solo se $ac \leq bc$ per ogni $c \in \mathbb{Q}$ con $c < 0$;
16. per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$ con $0 < a < b$ si ha: $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Esercizio 1.3 *Dimostrare che la proprietà 13 è conseguenza della proprietà 14.*

L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile, cioè può essere messo in biiezione con i numeri naturali. Un possibile metodo è il seguente: se posso numerare l'insieme dei razionali non negativi $\mathbb{Q}^+$, allora posso numerare tutto $\mathbb{Q}$ perché se q_n con $n \in \mathbb{N}$ è una enumerazione di $\mathbb{Q}^+$, allora $0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \dots$ è una enumerazione di $\mathbb{Q}$. Pertanto è sufficiente risolvere il problema per $\mathbb{Q}^+$. A questo punto, scriviamo i numeri razionali positivi in una tabella infinita scrivendo sulla prima

riga tutti i razionali con denominatore 1, sulla seconda quelli con denominatore 2, etc. I razionali con denominatore fissato sono numerabili.

$\frac{1}{1}$		$\frac{2}{1}$		$\frac{3}{1}$		$\frac{4}{1}$	...
	↙		↙		↙		
$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{4}{2}$	...
	↙		↙		↙		
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{3}$		$\frac{4}{3}$	...
	↙		↙		↙		
...	...	...	...	...			

Alcuni razionali appariranno più volte ma se posso enumerare gli elementi di questa tabella, posso enumerare gli elementi di $\mathbb{Q}^+$ che ne formano un sottoinsieme. Ora, una enumerazione degli elementi di questa tabella si ottiene scrivendo prima $\frac{1}{1}$, poi $\frac{2}{1}$, poi seguendo le frecce fino alla prima colonna, ripartendo successivamente dal primo elemento non ancora scritto della prima riga. In modo analogo si dimostra che ogni famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

2 I numeri reali

Anche per i numeri razionali esistono equazioni algebriche che non ammettono soluzione, ad esempio $X^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$. Infatti, se per assurdo esistessero $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, allora avremmo $2n^2 = m^2$. Scomponendo in fattori primi entrambi i membri, 2 apparirebbe con esponente dispari nell'espressione a sinistra e con esponente pari nell'espressione a destra, impossibile per l'unicità della fattorizzazione in $\mathbb{Z}$. Cerchiamo allora un insieme di numeri nei quali esistano, ad esempio, numeri x tali che $x^n = p$ per ogni coppia di numeri positivi n e p . Un insieme che soddisfi questa proprietà è dato dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. I suoi elementi possono essere descritti come "espansioni decimali infinite", ad esempio $-\sqrt{2} = -1,414213542\dots$ dove l'espansione decimale non ha termine.

Proposizione 2.1 *L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile.*

Dimostrazione: (idea) Se lo fosse, avremmo anche una enumerazione dei numeri reali compresi tra 0 e 10: $r_0 = r_{00}, r_{01} \dots; r_1 = r_{10}, r_{11} \dots; \dots; r_k = r_{k0}, r_{k1} \dots; \dots$. Prendiamo allora il numero x avente scrittura decimale $x_0, x_1 \dots$ costruita in modo che la cifra k -esima sia *diversa* dalla cifra k -esima di r_k . Il numero x non può avere scrittura uguale a nessuno degli r_k perché ha cifra k -esima diversa. Si può dimostrare che è possibile costruire x in modo tale che non sia uguale a nessuno dei numeri precedenti, pertanto la enumerazione data non può essere una enumerazione dei numeri reali compresi tra 0 e 10. $\square$

Per definire la somma ed il prodotto di due numeri reali non possiamo utilizzare un algoritmo o una formula come nel caso dei naturali, degli interi o dei razionali. Per descrivere la somma ed il prodotto in modo rigoroso sarebbe

necessario utilizzare il concetto di *limite*, che sarà trattato più avanti in questo corso. Intuitivamente, possiamo vedere $-\sqrt{2}$ come limite della successione approssimante

$$x_0 = -1; \ x_1 = -1,4; \ x_2 = -1,41; \ x_3 = -1,414;$$

$$x_4 = -1,4142; \ x_5 = -1,41421; \dots$$

Utilizzando questa visione intuitiva, la somma ed il prodotto di due numeri reali

$$r = \sum_{k=-\infty}^M a_k 10^k = a_M a_{M-1} \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$$

$$s = \sum_{k=-\infty}^N b_k 10^k = b_N b_{N-1} \cdots b_0, b_{-1} b_{-2} \dots$$

saranno i numeri reali che sono limite delle successioni $(r+s)_n$ ed $(rs)_n$:

$$(r+s)_n = a_M a_{M-1} \cdots a_0, \cdots a_{-n} + b_N b_{N-1} \cdots b_0, \cdots b_{-n};$$

$$(rs)_n = (a_M a_{M-1} \cdots a_0, \cdots a_{-n})(b_N b_{N-1} \cdots b_0, \cdots b_{-n})$$

cioè saranno i limiti delle somme e prodotti *approssimati* alla n -esima cifra decimale.

Tali operazioni soddisfano le seguenti proprietà:

1. $a + b = b + a$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (proprietà commutativa della somma);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ (proprietà associativa della somma);
3. $0 + a = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (esistenza dell'elemento neutro per la somma);
4. per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $b = (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + b = 0$ (esistenza dell'elemento opposto);
5. $a(b + c) = ab + ac$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ (proprietà distributiva);
6. $(ab)c = a(bc)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ (proprietà associativa del prodotto);
7. $ab = ba$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (proprietà commutativa del prodotto);
8. $1a = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (esistenza dell'elemento neutro per il prodotto);
9. dati $a, b \in \mathbb{R}$, se $ab = 0$ allora $a = 0$ oppure $b = 0$ ($\mathbb{R}$ è privo di divisori dello zero);
10. per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $ab = 1$, (tutti gli elementi *non nulli* di $\mathbb{R}$ sono invertibili).

E' definita inoltre un'applicazione iniettiva $j: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ data dall'espansione decimale dei numeri razionali. Come abbiamo visto precedentemente, l'immagine della funzione j è contenuta nell'insieme dei reali con scrittura decimale periodica.

Proposizione 2.2 *L'immagine della funzione $j: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ consiste di tutti e soli gli elementi di $\mathbb{R}$ che ammettono scrittura decimale periodica.*

Dimostrazione: Sia $x = a_N \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-k} \overline{b_1 b_2 \cdots b_l}$. Allora il numero $10^l x$ ha scrittura decimale periodica con stesso periodo $\overline{b_1 b_2 \cdots b_l}$ di x e con stesso numero k di cifre comprese tra la virgola ed il periodo. Pertanto $(10^l x - x) = (10^l - 1)x$ è un numero che ha scrittura decimale finita ed è della forma

$$\begin{aligned} (10^l - 1)x &= a_N 10^{N+l} + \cdots + c_0 10^0 + c_{-1} 10^{-1} \cdots c_{-k} 10^{-k} \\ &= \frac{a_N 10^{N+l+k} + \cdots + c_0 10^k + c_{-1} 10^{k-1} \cdots c_{-k}}{10^k} \end{aligned}$$

quindi

$$x = \frac{a_N 10^{N+l+k} + \cdots + c_0 10^k + c_{-1} 10^{k-1} \cdots c_{-k}}{10^k (10^l - 1)} \in \mathbb{Q}. \quad \square$$

Osservazione 2.3 *A scritture decimali distinte non sempre corrispondono numeri razionali distinti: ad esempio $0, \bar{9} = 1$. Infatti se $x = 0, \bar{9}$ allora, come nella dimostrazione della proposizione, abbiamo $10x - x = 9, \bar{9} - 0, \bar{9} = 9$ quindi $9x = 9$ pertanto $x = 1$.*

Esercizio 2.4 *Scrivere in forma di frazione i numeri aventi scrittura decimale $12,34\bar{5}$ e $31,483\bar{9}$.*

Anche l'insieme dei numeri reali è totalmente ordinato da una relazione che indicheremo con $\leq$. Dati $x, y \in \mathbb{R}$ diremo che $x \leq y$ se $x = y$ oppure $x < y$, dove la relazione $<$ può essere descritta, in termini di espansione decimale, come segue: un elemento $x \in \mathbb{R}$ è positivo ($x > 0$) se la sua espansione decimale ha segno $+$ e negativo $x < 0$ se la sua espansione decimale ha segno $-$. I numeri negativi sono minori di tutti i numeri positivi. Se $x, y > 0$ con $x \neq y$ allora sia r l'esponente della più elevata potenza di 10 tale che le scritture di x ed y presentino cifre diverse. Allora $x < y$ se il termine r -esimo dell'espansione decimale di x è minore del termine r -esimo dell'espansione decimale di y . Se $x, y < 0$ allora $x < y$ se e solo se $-x > -y > 0$.

Possiamo riassumere le proprietà di compatibilità tra l'ordinamento e le operazioni in $\mathbb{R}$ come segue.

1. per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq b$ se e solo se $a + c \geq b + c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ (compatibilità dell'ordine con la somma);
2. se $x > 0$ allora $x^{-1} > 0$;
3. se $x < 0$ allora $x^{-1} < 0$;

4. per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ se e solo se $xz \geq yz$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ con $z > 0$;
5. per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ se e solo se $xz \leq yz$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ con $z < 0$;
6. per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 < x < y$, si ha: $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Esercizio 2.5 Dire quali delle suddette proprietà sono conseguenza delle altre.

Esercizio 2.6 Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x > 0$, $y < 0$. Determinare l'ordine tra 0 , x^{-1} e y^{-1} .

Esercizio 2.7 Dimostrare che, dati $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$,

1. $x_1 \cdots x_k = 0$ se e solo se almeno un $x_j = 0$;
2. $x_1 \cdots x_k > 0$ se un numero pari di x_j è negativo;
3. $x_1 \cdots x_k < 0$ se un numero dispari di x_j è negativo.

Anche per i numeri reali possiamo introdurre il concetto di modulo: dato $a \in \mathbb{R}$ il modulo o valore assoluto di a è

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Il modulo soddisfa le proprietà:

1. per ogni $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$;
2. per ogni $x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
3. per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$;
4. per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$;

Esercizio 2.8 Calcolare il modulo dei seguenti numeri reali:

1. $x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{3}$;
2. $y = \sqrt{10} - \sqrt{12} + \sqrt{2}$;
3. $z = \frac{2}{7} - \sqrt{6} + 0,04$;
4. $w = 2\pi - 6$.

3 I numeri complessi

Non tutte le equazioni del tipo $ax^2 + bX + c = 0$ con $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ammettono soluzione in $\mathbb{R}$. Ad esempio, $X^2 + c = 0$ ammette soluzione se e solo se $c \leq 0$. Per tale motivo si è introdotto un altro insieme numerico, l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. I suoi elementi sono della forma $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ed i è un numero tale che $i^2 = -1$. Il numero reale a è detto *parte reale* di z , mentre b è detto *parte immaginaria* di z . Identificheremo il numero complesso con parte immaginaria nulla $z = a + 0i$, con il numero reale a , cioè con la sua parte reale.

In $\mathbb{C}$ possiamo definire operazioni di somma e prodotto utilizzando il prodotto in $\mathbb{R}$ e le regole: $i^2 = -1$, $ia = ai$ se $a \in \mathbb{R}$. Avremo allora:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Tali operazioni godono delle seguenti proprietà:

1. $a + b = b + a$ per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ (proprietà commutativa della somma);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$ (proprietà associativa della somma);
3. $0 + a = a$ per ogni $a \in \mathbb{C}$ (esistenza dell'elemento neutro per la somma, $0 = 0 + i0$);
4. per ogni $a \in \mathbb{C}$ esiste $b = (-a) \in \mathbb{C}$ tale che $a + b = 0$ (esistenza dell'elemento opposto);
5. $a(b + c) = ab + ac$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$ (proprietà distributiva);
6. $(ab)c = a(bc)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$ (proprietà associativa del prodotto);
7. $ab = ba$ per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ (proprietà commutativa del prodotto);
8. $1a = a$ per ogni $a \in \mathbb{C}$ (esistenza dell'elemento neutro per il prodotto $1 = 1 + i0$);
9. dati $a, b \in \mathbb{C}$, se $ab = 0$ allora $a = 0$ e/o $b = 0$ ($\mathbb{C}$ è privo di divisori dello zero);
10. Per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $zw = 1$ (tutti gli elementi *non nulli* di $\mathbb{C}$ sono invertibili).

L'ultima proprietà enunciata segue dalla seguente osservazione: se $z = a + ib$ allora $z(a - ib) = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ è un numero reale non negativo, ed, essendo somma di due numeri non negativi, esso è 0 se e soltanto se $a = b = 0$, ovvero se e soltanto se $z = 0$. Se $z \neq 0$ avremo

$$z \frac{(a - ib)}{(a^2 + b^2)} = (a + ib) \left(\frac{a}{(a^2 + b^2)} - i \frac{b}{(a^2 + b^2)} \right) = 1$$

quindi z è invertibile.

Motivati da questa osservazione, osserviamo che, ad ogni numero complesso $z = a + ib$, possiamo associare il numero complesso $\bar{z} = a - ib$, detto il *coniugato* di z , ed il numero reale non negativo $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, detto *modulo* di z . Se $z \neq 0$, si ha:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Esempio 3.1 Il coniugato dell'elemento $z = \frac{\sqrt{3}}{8} - i\frac{1}{8}$ è $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{8} + i\frac{1}{8}$; il modulo di z è

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{4}{64}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

e l'inverso di z è

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8} + i\frac{1}{8}}{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{16}} + i\frac{1}{\frac{1}{16}} = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Il modulo di un numero complesso, ed il complesso coniugato godono delle seguenti proprietà:

1. $\overline{(x \pm y)} = \bar{x} \pm \bar{y}$ per ogni $x, y \in \mathbb{C}$, ovvero il coniugato della somma (rispettivamente della differenza) è la somma (rispettivamente la differenza) dei coniugati;
2. $\overline{(xy)} = \bar{x}\bar{y}$ per ogni $x, y \in \mathbb{C}$, ovvero il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati;
3. $\overline{(\bar{z})} = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, ovvero il coniugato del coniugato di un numero complesso coincide con il numero dato;
4. dato $z \in \mathbb{C}$, z è reale se e solo se $z = \bar{z}$.
5. $|z| \in \mathbb{R}$ e $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ (il modulo è sempre un numero reale non negativo);
6. $|z| = 0$ se e soltanto se $z = 0 + i0$;
7. $|z| = |\bar{z}|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ (il modulo di un numero complesso coincide con il modulo del suo coniugato);
8. $|zw| = |z||w|$ (il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli);
9. $z^2 = |z|^2$ se e soltanto se $z \in \mathbb{R}$;
10. Se $z \in \mathbb{R}$, allora $|z|$ coincide con il valore assoluto precedentemente introdotto su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.2 Verificare le proprietà del coniugio e del modulo per un numero complesso $z = a + ib$.

Esercizio 3.3 Esprimere nella forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ i seguenti numeri complessi:

1. $(3 - i)(5 + 2i)$;
2. $(3 + 4i)\overline{(2 - i)}$;
3. $\frac{1}{(2-2i)}$;
4. $\frac{(2-9i)}{(5+i)}$;

Il modulo ed il coniugato di un numero complesso hanno un'interpretazione geometrica. Possiamo infatti identificare i numeri complessi con i punti del piano cartesiano, che in questo caso chiameremo piano di Gauss, ponendo il numero complesso $z = a + ib$ nel punto del piano di ascissa a e di ordinata b . Allora $|z|$ è la distanza di z dall'origine, mentre $\bar{z}$ si ottiene riflettendo il punto z rispetto all'asse delle ascisse. L'angolo che la retta passante per 0 e z forma con l'asse delle ascisse è detto *l'argomento* di z . Tale angolo è determinato a meno di multipli di 2π . Chiameremo *argomento principale* di z , l'argomento θ di z tale che $0 \leq \theta < 2\pi$.

Come si determina tale angolo? Osserviamo che, se $z = a + ib$, allora $z' = \frac{z}{|z|}$ ha modulo 1, e si trova sulla retta passante per 0 e per z (il rapporto tra la sua ordinata e la sua ascissa è uguale al rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di z). Quindi z' si trova sulla circonferenza di raggio 1 ed ha lo stesso argomento, che chiameremo θ , di z . Dalle nozioni di trigonometria ricaviamo che

$$\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} = \frac{z}{|z|} = z' = \cos \theta + i \sin \theta$$

perciò, uguagliando ascisse tra loro ed ordinate tra loro, abbiamo:

$$\frac{a}{|z|} = \cos \theta, \quad \frac{b}{|z|} = \sin \theta$$

quindi l'argomento principale θ di z è l'angolo compreso tra 0 e 2π con coseno e seno dati dalle formule soprantanti. Grazie all'identificazione dei punti del piano cartesiano con gli elementi di $\mathbb{C}$, possiamo osservare che un numero complesso z non nullo è completamente determinato dal suo modulo $|z|$ ed un suo argomento $\theta = \arg(z)$: Si ha inoltre:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Tale espressione viene detta *forma polare* di z .

Esercizio 3.4 Scrivere in forma polare i seguenti numeri complessi:

1. $z = 2\sqrt{3} - 2i$;
2. $w = \frac{(4-4i)}{(\sqrt{3}-i)}$;

3. $y = -5 + 5i$;

La forma polare di un numero complesso “si comporta bene rispetto al prodotto”: se $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = |w|(\cos \eta + i \sin \eta)$, allora avremo

$$zw = |z||w|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \eta + i \sin \eta)$$

$$= |z||w|((\cos \theta \cos \eta - \sin \theta \sin \eta) + i(\sin \theta \cos \eta + \cos \theta \sin \eta)).$$

Dalle formule del seno e del coseno della somma di due angoli, otteniamo:

$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \eta) + i \sin(\theta + \eta))$$

ovvero: il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli dei numeri dati e per argomento la somma degli argomenti dei numeri dati. In particolare, da questa formula deduciamo facilmente la forma polare dell'inverso di un numero complesso $z \neq 0$: si ha

$$\begin{aligned} zz^{-1} &= |z||z^{-1}|(\cos(\arg(z) + \arg(z^{-1})) + i \sin(\arg(z) + \arg(z^{-1}))) = \\ &= 1 = |1|(\cos 0 + i \sin 0) \end{aligned}$$

perciò $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ e $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$.

Esercizio 3.5 Verificare che $\arg(\bar{z}) = -\arg z$ per ogni $z \neq 0$.

Un'ulteriore conseguenza della formula del prodotto in forma polare è la formula di de Moivre per la potenza di un numero complesso: dato $z \in \mathbb{C}$ ed $n \in \mathbb{N}$, si può calcolare la potenza n -esima di z , ovvero $\underbrace{z \cdots z \cdots z}_{n \text{ volte}}$

$$z^n = |z|^n(\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)).$$

Utilizzando sia la formula di de Moivre che la forma polare dell'inverso, possiamo anche calcolare le potenze *negative* di un numero complesso $z \neq 0$:

$$z^{-n} = |z|^{-n}(\cos(n \arg z) - i \sin(n \arg z)).$$

Per quest'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $z^{-n} = (z^{-1})^n$ e che $\cos(-\theta) = \cos \theta$.

Esercizio 3.6 Si calcolino, utilizzando la formula di De Moivre, i seguenti numeri complessi:

1. $(-5 + 5i)^6$;
2. $(\sqrt{3} - i)^{10}$;
3. $3(\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ)^3$;
4. $(5 + 5\sqrt{3})^{-3}$.

Osserviamo che, se $z = a + i0$, allora in $\mathbb{C}$ possiamo sempre estrarre la radice quadrata di z : infatti se $a > 0$, avremo $(\pm\sqrt{a})^2 = a$, se $a = 0$ avremo $0^2 = 0$, se $a < 0$ allora $-a > 0$ e $(i\sqrt{-a})^2 = (-i\sqrt{-a})^2 = a$. Osserviamo che in questo caso, le radici di $z = a + i0$ sono reali, oppure complesse e coniugate. In realtà si può dire molto di più perché la formula di de Moivre può essere utilizzata anche per calcolare le radici n -esime di un numero complesso z . Per ogni numero naturale non nullo n possiamo calcolare tutti i numeri $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^n = z$. Infatti, data la forma polare di un numero complesso fissato $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ se w è un numero complesso tale che $w^n = z$, allora la sua forma polare $w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ deve essere tale che

- $|w|^n = |z|$
- $n\alpha = \theta + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ (ricordate che l'argomento di un numero complesso è determinato solo a meno di multipli interi di 2π).

Pertanto $|w| = |z|^{\frac{1}{n}}$ e $\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ora, osserviamo che, prendendo $k = 0, 1, \dots, n-1$, i numeri:

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right)$$

sono tutti diversi tra loro. Pertanto esistono almeno n radici n -esime distinte del numero z . D'altra parte, qualsiasi altro intero l può essere scritto come $l = mn + r$ (divisione con il resto in $\mathbb{Z}$) con $r = 0, 1, \dots, n-1$. Quindi $\frac{2l\pi}{n} = \frac{(2mn\pi) + 2r\pi}{n} = \frac{2r\pi}{n} + 2m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$. Ne segue che

$$w_l = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2l\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2l\pi}{n} \right) \right) = w_r.$$

Ne deduciamo che le radici n -esime di z coincidono con tutti e soli i numeri complessi che si possono scrivere nella forma

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

In particolare, per ogni numero complesso non nullo z e per ogni numero naturale n non nullo, z ha esattamente n radici n -esime in $\mathbb{C}$.

Esercizio 3.7 Si determinino tutti i numeri complessi tali che:

1. $w^3 = i$;
2. $z^5 = \frac{(2-2\sqrt{3}i)}{(3-i)}$;
3. $y^3 = 1 - i$.

Esercizio 3.8 Calcolare le radici quadrate di un numero della forma $z = a + i0$ già descritte in precedenza, utilizzando la formula delle radici n -esime.

Come conseguenza della formula sulle radici n -esime, sappiamo che è possibile estrarre la radice quadrata di un qualsiasi numero complesso ponendo $n = 2$ nella formula. Questo vuol dire che, *tutte le equazioni di secondo grado* $aX^2 + bX + c = 0$ con coefficienti in $\mathbb{C}$ ($a \neq 0$), hanno soluzioni in $\mathbb{C}$. Infatti, utilizzando la formula delle soluzioni

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

poiché in $\mathbb{C}$ è sempre possibile estrarre la radice quadrata di un elemento, tali soluzioni saranno sempre elementi di $\mathbb{C}$.

Esercizio 3.9 Calcolare le soluzioni dell'equazione: $iX^2 - X + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$.

(Soluzioni: $w_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)$, $w_2 = -\frac{\sqrt{6}}{4} - i\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)$).

In realtà vale un teorema molto più forte:

Teorema 3.10 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Tutte le equazioni algebriche della forma $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$ e $n \neq 0$ ammettono soluzione in $\mathbb{C}$.*

In particolare, una conseguenza del Teorema di Ruffini e del Teorema fondamentale dell'algebra (ogni polinomio non costante di $\mathbb{C}[X]$ ha una radice in $\mathbb{C}$) è il seguente Teorema:

Teorema 3.11 *Ogni elemento f di $\mathbb{C}[X]$ ammette una fattorizzazione del tipo $f = c_0(X - c_1) \cdots (X - c_n)$ dove i $c_j \in \mathbb{C}$ per $j > 0$ sono tutti e soli gli zeri di f .*