Relazioni di equivalenza-Classi di equivalenza

Giovanna Carnovale

October 24, 2011

Dato un insieme S, una *partizione* di S è una collezione di sottoinsiemi di S, a due a due disgiunti e tali che la loro unione sia S. In altre parole, la collezione dei sottoinsiemi X_i al variare di i in un insieme di indici I è una partizione di S se $X_i \cap X_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ e $S = \bigcup_{i \in I} X_i$. Ad esempio, se $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la collezione data da $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{3, 5\}$ e $X_3 = \{4\}$ è una partizione di S. Se prendiamo l'insieme $\mathbb{N}$, i sottoinsiemi $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ e $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari}\}$ formano una partizione di $\mathbb{N}$.

Sia ρ una relazione di equivalenza su S. Definiamo la *classe di equivalenza* dell'elemento $s \in S$ come l'insieme di tutti gli elementi di S che sono in relazione con s. La denoteremo con $[s]$. In formule

$$[s] = \{s' \in S \mid s'\rho s\}$$

poiché la relazione ρ è simmetrica, avremo anche

$$[s] = \{s' \in S \mid s\rho s'\}.$$

Inoltre, poiché ρ è riflessiva, avremo $s \in [s]$. L'elemento s viene detto un *rappresentante* della classe $[s]$.

- Classi di equivalenza in un insieme S o sono disgiunte oppure coincidono. Infatti, se $[s] \cap [r] \neq \emptyset$ allora esiste $x \in S$ tale che $x\rho s$ ed $r\rho x$. Per la proprietà transitiva di ρ avremo che $s\rho r$ quindi anche, per la proprietà simmetrica, $r\rho s$. Vogliamo mostrare che allora $[s] = [r]$. Sia $y \in [s]$. Allora $y\rho s$. Poiché $s\rho r$ avremo, per la proprietà transitiva, $y\rho r$ quindi $y \in [r]$. Pertanto $[s] \subseteq [r]$. D'altra parte, se $z \in [r]$ allora $z\rho r$ e poiché $r\rho s$ vale anche $z\rho s$ quindi $z \in [s]$. Perciò vale anche la seconda inclusione ed $[s] = [r]$.

- L'unione delle classi di equivalenza coincide con S. Infatti, ogni elemento s di S appartiene alla sua classe di equivalenza, quindi $\forall s \in S$ avremo $s \in \bigcup_{[r] \text{ classe}} [r]$ perciò $S \subseteq \bigcup_{[r] \text{ classe}} [r]$. D'altra parte, ogni classe è un sottoinsieme di S quindi l'unione delle classi è contenuta in S. Pertanto, abbiamo la doppia inclusione e $S = \bigcup_{[r] \text{ classe}} [r]$.

Pertanto, con la terminologia appena introdotta possiamo dire che data una relazione di equivalenza ρ su un insieme S le classi di equivalenza di S rispetto a ρ formano una partizione di S.

Inoltre, da quanto appena visto segue che un qualsiasi elemento $r \in [s]$ è un rappresentante di $[s]$ perché se $r \in [s]$ allora $[s] = [r]$ quindi r è un rappresentante della classe.

L'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza rispetto a ρ viene detto *insieme quoziente* e si denota usualmente con S/ρ.

Se prendiamo la relazione ρ su $\mathbb{N}$ data da: "$m\rho n$ se hanno la stessa parità" allora avremo due classi di equivalenza: quella che contiene tutti i numeri pari, cioè l'insieme P e quella che contiene tutti i numeri dispari, cioè l'insieme D. Avremo $0 \in P$ e $1 \in D$. Pertanto $[0] = P$, $[1] = D$ e l'insieme quoziente $\mathbb{N}/\rho = \{[0], [1]\}$ consiste di due elementi.

Esempio 0.1 *Sia $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = x^2$. Si consideri la relazione di equivalenza data da $x\rho y$ se $h(x) = h(y)$. La classe di equivalenza di un elemento $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è data da*

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid y\rho x\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 = x^2\} = \{x, -x\}$$

mentre la classe di 0 è $[0] = \{0\}$. Ogni classe contiene quindi un unico elemento maggiore o uguale a 0. La legge $[x] \mapsto |x|$ determina una biezione tra l'insieme quoziente $\mathbb{R}/\rho$ e $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esercizio 0.2 *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Si consideri la relazione data da $x\rho y$ se $f(x) = f(y)$. Si dimostri che si tratta di una relazione di equivalenza. Si verifichi che la classe di equivalenza di un elemento $x \neq 1$ è data da*

$$[x] = \{x, 2 - x\}$$

mentre $[1] = \{1\}$. Si determini una biezione tra l'insieme quoziente $\mathbb{R}/\rho$ e $\mathbb{R}_{\geq 1}$.

Data una relazione di equivalenza su un insieme S dotato di un'operazione $*\colon S \times S \to S$, diremo che ρ è una *congruenza* (o una equivalenza compatibile con $*$) se per ogni $s, s', r, r' \in S$ tali che $s\rho s'$ ed $r\rho r'$ vale anche $(s * s')\rho(r * r')$.

Esempio 0.3 *Sia $\mathbb{N}$ dotato dell'operazione $+$ e sia ρ la relazione di equivalenza data da $m\rho n$ se $m - n$ è un intero pari. Allora ρ è compatibile con la somma perché se abbiamo m, m', n, n' con $m - m'$ pari ed $n - n'$ pari, allora $(m + n) - (m' + n') = (m - m') + (n - n')$ è ancora pari quindi $(m + n)\rho(m' + n')$.*

Esercizio 0.4 *Sia $\mathbb{N}$ dotato dell'operazione di moltiplicazione $\cdot$ e sia ρ la relazione di equivalenza data da $m\rho n$ se $m - n$ è un intero pari. Si dica se ρ è compatibile con la moltiplicazione motivando la risposta.*