Relazioni e Principio di Induzione

Giovanna Carnovale

October 12, 2011

1 Relazioni

Dato un insieme S, un sottoinsieme fissato R del prodotto cartesiano $S \times S$ definisce una *relazione* ρ tra gli elementi di S: dati $s, s' \in S$, diremo che s è *in relazione con* s' (in formule: $s\rho s'$), se la coppia *ordinata* (s, s') è un elemento di R.

Esempio 1.1 *1. Se $S = \mathbb{R}$ ed R è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione $2x + y - 3 = 0$ allora $x, y \in \mathbb{R}$ sono in relazione tra loro se e solo se $y = 3 - 2x$. Quindi $0\rho 3$ mentre $-1 \not\rho 4$.*

2. *Se $S = \mathbb{N}$ ed R è l'insieme delle coppie ordinate (n, m) tali che $m - n \in \mathbb{N}$, allora la relazione ρ è la relazione $\leq$, cioè $a\rho b$ se $a \leq b$.*

3. *Se $S = \mathbb{N}$ ed R è l'insieme delle coppie ordinate (n, m) tali che $n - m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, allora la relazione ρ è la relazione $>$, cioè $a\rho b$ se $a > b$.*

4. *Se $S = \mathbb{N}$ ed R è l'insieme delle coppie ordinate (n, m) tali che $m - n$ è un intero pari, allora $a\rho b$ se a e b hanno la stessa parità.*

Per semplicità, tralasceremo spesso di indicare il sottoinsieme $R \subseteq S \times S$ e daremo direttamente la condizione tra due elementi $x, y \in S$ affinché $x\rho y$.

Le relazioni possono godere di alcune proprietà:

1. Una relazione ρ su S è detta *riflessiva* se per ogni $s \in S$ vale $s\rho s$. Nell'Esempio 1.1, la seconda e la quarta relazione sono riflessive, mentre la prima e la terza non lo sono. Infatti, nel primo caso avremo ad esempio $0 \not\rho 0$, nel terzo caso, nessuno numero naturale è strettamente maggiore di se stesso.

2. Una relazione ρ su S è detta *simmetrica* se ogni qualvolta esistono $s, r \in S$ con $s\rho r$, vale anche $r\rho s$. Nell'Esempio 1.1, solo la quarta relazione è simmetrica perché se $m - n$ è pari, lo è anche il suo opposto $n - m$. In tutti gli altri casi possiamo trovare due elementi per i quali $x\rho y$ mentre $y \not\rho x$. Nel primo abbiamo ad esempio $0\rho 3$ ma $3 \not\rho 0$; nel secondo abbiamo $3\rho 4$ ma $4 \not\rho 3$; nel terzo abbiamo $4\rho 3$ ma $3 \not\rho 4$.

3. Una relazione ρ su S è detta *transitiva* se ogni qualvolta esistono $s, r, t \in S$ con $s\rho r$ ed $r\rho t$, vale anche $s\rho t$. Nell'Esempio 1.1, la seconda, la terza e la quarta relazione sono riflessive, mentre la prima non lo è. Infatti, abbiamo $0\rho 3$ e $3\rho(-3)$, ma $0 \not\rho (-3)$.

4. Una relazione ρ su S è detta *antisimmetrica* se dati $s, r \in S$ è possibile avere contemporaneamente $s\rho r$ e $r\rho s$ **solo se** $s = r$. Nell'Esempio 1.1, la prima relazione è antisimmetrica perché se $x\rho y$ e $y\rho x$ allora abbiamo $2x + y = 3$ e $2y + x = 3$, e ciò è possibile solo se $x = y = 1$. La seconda relazione è antisimmetrica perché se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$; la terza relazione è antisimmetrica perché non esistono $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $a < b$ e $b < a$. La quarta relazione non è antisimmetrica, perché ad esempio, $0\rho 2$ e $2\rho 0$ ma $0 \neq 2$.

Una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è detta *relazione di equivalenza.*

Esempio 1.2
- *La quarta relazione nell'Esempio 1.1 è una relazione di equivalenza; la prima e la terza non lo sono perché non sono riflessive, la seconda non lo è perché non è simmetrica.*
- *Sia data la funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = -z + 3$. Definiamo una relazione ρ su $\mathbb{Z}$ data da $z\rho z'$ se $f(z) = f(z')$. Essa è riflessiva, perché per ogni z vale $f(z) = f(z)$ quindi $z\rho z$. Se $z\rho z'$ allora $f(z) = f(z')$ quindi $f(z') = f(z)$ perciò $z'\rho z$ e ρ è simmetrica. Inoltre, se $z\rho z'$ e $z'\rho z''$ allora $f(z) = f(z')$ e $f(z') = f(z'')$ quindi $f(z) = f(z'')$ perciò $z\rho z''$ e la relazione è anche transitiva. Quindi ρ è una relazione di equivalenza.*

Una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva si chiama ordinamento parziale.

Esempio 1.3
- *La seconda relazione nell'Esempio 1.1 è un'ordinamento parziale; la prima e la terza non lo sono perché non sono riflessive, la quarta non lo è perché non è transitiva.*
- *Sia data la funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = -z + 3$. Definiamo una relazione ρ su $\mathbb{Z}$ data da $z\rho z'$ se $f(z) \leq f(z')$. Essa è riflessiva, perché per ogni z vale $f(z) \leq f(z)$ quindi $z\rho z$. Se $z\rho z'$ e $z'\rho z''$ allora $f(z) \leq f(z')$ e $f(z') \leq f(z'')$ quindi $f(z) \leq f(z'')$ perciò $z\rho z''$ e la relazione è anche transitiva. Siano ora z, z' tali che $z\rho z'$ e $z'\rho z$. Allora $f(z) \leq f(z')$ e $f(z') \leq f(z)$, perciò $f(z) = f(z')$. In altre parole, $-z + 3 = -z' + 3$. Ma ciò è possibile solo se $z = z'$, pertanto la relazione è antisimmetrica e ρ è un ordinamento parziale.*

Un ordinamento parziale ρ su S è detto *ordinamento totale* se vale anche la proprietà di *tricotomia*, ovvero: dati x, $y \in S$ è possibile una ed una sola delle seguenti opzioni:

$$\begin{gathered} x\rho y, \text{ con } x \neq y; \\ x = y, \\ y\rho x, \text{ con } x \neq y. \end{gathered}$$

Esempio 1.4

- *La seconda relazione nell'Esempio 1.1 è un'ordinamento totale, le altre non lo sono perché non sono ordinamenti parziali.*
- *Sia dato l'ordinamento parziale ρ su $\mathbb{Z}$ dato da $z\rho z'$ se $f(z) \leq f(z')$ con f come nell'esempio 1.3. Allora esso è un ordinamento totale. Infatti, presi z, z', consideriamo $f(z)$ e $f(z')$. Se $f(z) = f(z')$ abbiamo visto che segue che $z = z'$. Se $f(z) \neq f(z')$ allora o $f(z) \leq f(z')$ (quindi $z\rho z'$), oppure $f(z') \leq f(z)$ (quindi $z'\rho z$). Pertanto ρ gode della proprietà di tricotomia.*

Esercizio 1.5

1. *Sia S un insieme e sia $P(S)$ l'insieme che consiste di tutti i suoi sottoinsiemi. Diremo che per $A, B \subseteq S$ abbiamo $A\rho B$ se $A \subseteq B$. Verificare se $\subseteq$ gode della proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, tricotomia. Dire se è un ordinamento parziale, se è un ordinamento totale, se è una relazione di equivalenza.*
2. *Sia data la funzione $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = x^2$. Definiamo una relazione ρ su $\mathbb{R}$ data da $x\rho x'$ se $h(x) \leq h(x')$. Verificare se ρ gode della proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, tricotomia. Dire se è un ordinamento parziale, se è un ordinamento totale, se è una relazione di equivalenza.*
3. *Sia data la funzione $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = x^2$. Definiamo una relazione ρ su $\mathbb{R}$ data da $x\rho x'$ se $h(x) = h(x')$. Verificare se ρ gode della proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, tricotomia. Dire se è un ordinamento parziale, se è un ordinamento totale, se è una relazione di equivalenza.*

2 I numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali, che denoteremo con $\mathbb{N}$, è, intuitivamente, l'insieme degli elementi 0, 1, 2, ... Sull'insieme $\mathbb{N}$ abbiamo la relazione $\leq$ con $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \cdots$. Scriveremo $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$. L'insieme $\mathbb{N}$ è totalmente ordinato rispetto a $\leq$, percé $\leq$ gode delle seguenti proprietà:

- per ogni $x \in \mathbb{N}$ vale $x \leq x$ (proprietà riflessiva di $\leq$);
- dati $x, y, z \in \mathbb{N}$ se valgono $x \leq y$ e $y \leq z$ allora vale $x \leq z$ (proprietà transitiva di $\leq$);
- dati x, $y \in \mathbb{N}$, se valgono $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica di $\leq$);
- per ogni x, $y \in \mathbb{N}$ allora si verifica una ed una sola delle tre possibilità:

  $$x < y; \quad x = y; \quad x > y$$

  (proprietà di tricotomia di $\leq$).

Dato un sottoinsieme S di $\mathbb{N}$ diremo che m è un elemento di minimo per S se $m \in S$ e $m \leq x$, per ogni $x \in S$. Denoteremo tale elemento con $\min S$. Un'importante proprietà di $\mathbb{N}$ è *il buon ordinamento*: *ogni sottoinsieme non vuoto S di $\mathbb{N}$ possiede un elemento minimo.*

Sull'insieme dei numeri naturali possiamo effettuare le operazioni di somma e di prodotto nel modo noto. La costruzione dell'insieme $\mathbb{N}$, del suo ordinamento e delle sue operazioni, può essere data in modo costruttivo come potrete vedere in altri insegnamenti del Corso di Laurea. Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà:

1. $a + b = b + a$ per ogni a, $b \in \mathbb{N}$ (proprietà commutativa della somma);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni a, b, $c \in \mathbb{N}$ (proprietà associativa della somma);
3. $0 + a = a$ per ogni $a \in \mathbb{N}$ (esistenza dell'elemento neutro per la somma);
4. $(ab)c = a(bc)$ per ogni a, b, $c \in \mathbb{N}$ (proprietà associativa del prodotto);
5. $a(b+c) = ab+ac$ per ogni a, b, $c \in \mathbb{N}$ (proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma);
6. $1a = a$ per ogni $a \in \mathbb{N}$ (esistenza dell'elemento neutro per il prodotto);
7. $ab = ba$ per ogni a, $b \in \mathbb{N}$ (proprietà commutativa del prodotto);
8. dati a, $b \in \mathbb{N}$, se $ab = 0$ allora $a = 0$ e/o $b = 0$.
9. dato a, $b \in \mathbb{N}$, se $ab = 1$ allora $a = b = 1$.
10. per ogni a, $b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ se e solo se $a + c \geq b + c$ per ogni $c \in \mathbb{N}$ (compatibilità dell'ordine con la somma);
11. per ogni a, $b \in \mathbb{N}$, $a > b$ se e solo se $ac > bc$ per ogni $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (compatibilità dell'ordine con il prodotto).

2.1 Principio di Induzione

Grazie al principio del buon ordinamento in $\mathbb{N}$ possiamo introdurre il principio di induzione, che ci fornisce un nuovo metodo dimostrativo. Ad esempio, ci permetterà di dimostrare che la somma dei numeri dispari compresi tra 1 e $2n - 1$ è uguae ad n^2, per ogni $n \geq 1$.

Intuitivamente osservo che se $n = 1$ tale somma è $1 = 1$, se $n = 2$ tale somma è $1+3 = 4 = 2^2$, se $n = 3$ allora tale somma è $(1+3)+5 = 2^2+(2\cdot2+1) = (2+1)^2$, e così via, ma non riesco in questo modo a fornire una dimostrazione rigorosa. Con il principio di induzione questo sarà possibile.

Teorema 2.1 (Principio di induzione, prima forma) *Sia dato un $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia assegnata, per ogni numero naturale n maggiore o uguale ad n_0, una affermazione $A(n)$. Se valgono le seguenti proprietà:*

1. *$A(n_0)$ è vera (detta* base dell'induzione*);*
2. *per ogni $k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ se $A(k)$ è vera allora è vera anche $A(k+1)$ (detta* passo induttivo*);*

allora $A(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Dimostrazione: Consideriamo l'insieme I dei numeri naturali n maggiori o uguali a n_0 per i quali l'affermazione associata $A(n)$ è falsa. In formule

$$I = \{n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \mid A(n) \text{ è falsa } \}.$$

Se riusciamo a dimostrare che I è vuoto, avremo dimostrato il Teorema. Supponiamo per assurdo che$I$ non sia vuoto. Per il principio del buon ordinamento, esisterà un elemento minimo m in I. Perciò $A(m)$ è falsa ed m è il più piccolo elemento di $\mathbb{N}_{\geq 0}$ per il quale la affermazione corrispondente è falsa. Ma allora, per prima cosa $m \neq n_0$ perché $A(n_0)$ è vera, quindi $m > n_0$ ed $m - 1 \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Ora, ci chiediamo se $A(m-1)$ sia vera o falsa, ed arriveremo ad una contraddizione. Infatti, poiché m è il minimo in I, avremo $m-1 < m$ quindi $m-1 \notin I$ perciò $A(m-1)$ è vera. D'altra parte, la proprietà 2. ci dice che se $A(m-1)$ è vera, allora $A((m-1)+1) = A(m)$ è anch'essa vera. Ciò porta ad una contraddizione perché $m \in I$. La contraddizione deriva dall'aver supposto possibile che I non fosse vuoto. $\square$

Come applicare il principio di induzione?
Nell'esempio citato, prendiamo:

- $n_0 = 1$
- $A(n)$ l'affermazione: $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$. Il termine di sinistra denota, in notazione compatta, la somma di tutti i termini che si possono scrivere come $(2j-1)$ al variare di j tra 1 e n, ovvero $1 + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + (2n-1)$.

Controllo $A(1)$: è vera? Si, perché

$$\sum_{j=1}^{1}(2j-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

cioè, sostituendo ad n il numero 1 nell'affermazione $A(n)$ ottengo una affermazione vera. Pertanto il passo base dell'induzione è verificato.

Verifichiamo ora il passo induttivo. Supponiamo sia vera $A(k)$, cioè supponiamo che sia vero che $\sum_{j=1}^{k}(2j-1) = k^2$. È allora vera $A(k+1)$? Scriviamo il termine a sinistra dell'affermazione $A(k+1)$. Esso si ottiene sostituendo al termine n il termine $k+1$ nel termine di sinistra dell'affermazione $A(n)$. Avremo: $\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1)$. Questa è una somma di $k+1$ termini che posso scomporre come la somma dei primi k termini alla quale aggiungo l'ultimo termine, cioè:

$$\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1) = \sum_{j=1}^{k}(2j-1) + (2(k+1)-1) = \sum_{j=1}^{k}(2j-1) + (2k+1)$$

Adesso utilizzo il fatto che sto supponendo vera $A(k)$, quindi:

$$\sum_{j=1}^{k}(2j-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$

poi utilizzo la formula del quadrato di un binomio per concludere che $\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1)=(k+1)^2$. Questa è proprio l'affermazione $A(k+1)$, infatti si ottiene sostituendo in $A(n)$, ad n il valore $k+1$. Abbiamo verificato quindi che $A(1)$ è vera e che preso $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, se $A(k)$ è vera, allora anche $A(k+1)$ è vera. Quindi $A(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio 2.2 *Dimostriamo per induzione che $2^n \geq n+1$ per ogni $n \geq 0$.*
In questo caso $n_0 = 0$ ed $A(n)$ è l'affermazione $2^n \geq n+1$. Verifichiamo il passo base: $A(1)$ afferma che $2^0 \geq 0+1$. Questa affermazione è vera perché $2^0 = 1$. Ora, preso k in $\mathbb{N}_{\geq 0}$, vediamo che $A(k)$ è l'affermazione $2^k \geq k+1$ e che $A(k+1)$ è l'affermazione $2^{k+1} \geq (k+1)+1$. Supponendo $A(k)$ vera, avremo:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot (k+1) = 2k+2 \geq k+2$$

dove, oltre ad usare che $A(k)$ è vera, sto usando che $k \geq 0$ quindi $2k = k+k \geq k$. Pertanto ho verificato le due proprietà che mi permettono di applicare il principio di induzione e di concludere che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 2.3 *Date $A_1, \ldots, A_n$ matrici quadrate invertibili con lo stesso numero di righe, dimostrare che il loro prodotto $(A_1 \cdots A_n)$ è invertibile e che l'inversa è data dalla seguente formula:*

$$(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Soluzione: Considero l'affermazione data come l'affermazione $A(n)$, con $n_0 = 1$. Per $n = 1$ l'affermazione dice che se A_1 è invertibile, allora A_1 stessa è invertibile e che la sua inversa è A_1^{-1}, che è banalmente vera. Supponiamo che l'affermazione sia vera se prendo k matrici (cioè che l'affermazione $A(k)$ sia vera), cioè che se ho k matrici invertibili con lo stesso numero di righe $A_1, \ldots, A_k$ allora il loro prodotto è invertibile e l'inversa è data dalla formula $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$ e considero $k+1$ matrici invertibili $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}$. Il loro prodotto è $A = A_1 \cdots A_k A_{k+1}$ Considero la matrice $M = A_{k+1}^{-1} A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$ ed il prodotto AM. Abbiamo

$$AM = (A_1 \cdots A_k A_{k+1})(A_{k+1}^{-1} A_k^{-1} \cdots A_1^{-1})$$

che per l'associatività della moltiplicazione tra matrici dà:

$$\begin{aligned}
AM &= A_1 \cdots A_k A_{k+1} A_{k+1}^{-1} A_k^{-1} \cdots A_1^{-1} \\
&= (A_1 \cdots A_k)(A_{k+1} A_{k+1}^{-1})(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) \\
&= (A_1 \cdots A_k) I (A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) \\
&= (A_1 \cdots A_k)(A_1 \cdots A_k)^{-1} \\
&= I
\end{aligned}$$

dove al penultimo passaggio abbiamo utilizzato l'ipotesi induttiva, cioè che $A(k)$ è vera. Pertanto la matrice M è l'inversa della matrice A. Questo dimostra che $A(k+1)$ è vera se $A(k)$ è vera. Applicando il principio di induzione posso concludere. $\square$

Conseguenza dell'esercizio 2.3 Sia A una matrice invertibile. Allora A^n è invertibile per ogni $n \geq 1$ e vale $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. Ciò si ottiene dall'esercizio precedente nel caso particolare in cui $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$.

Esercizio 2.4 *Sia* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = 2x + 1$. *Si denoti con* f^n *la composizione* $f \circ f \circ \cdots \circ f$ *con* n *fattori. Si dimostri che, per* $n \geq 1$ *si ha* $f^n(x) = 2^n x + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Esiste anche una seconda formulazione del principio di induzione, che daremo senza dimostrazione.

Teorema 2.5 (Principio di induzione, seconda forma) *Sia dato un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *e sia assegnata, per ogni numero naturale* n *maggiore o uguale ad* n_0, *una affermazione* $A(n)$. *Se valgono le seguenti proprietà:*

1. $A(n_0)$ *è vera;*
2. *per ogni* $m \in \mathbb{N}_{>n_0}$ *se* $A(k)$ *è vera per ogni* k *tale che* $n_0 \leq k < m$, *allora è vera anche* $A(m)$;

allora $A(n)$ *è vera per ogni* $n \geq n_0$. $\square$

Esercizio 2.6 *Si dimostri per induzione che*

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   per ogni $n \geq 1$;
2. $3^n \geq 2n + 1$ *per ogni* $n \geq 1$;
3. $\sum_{j=0}^{n} (4j+1) = (n+1)(2n+1)$ *per ogni* $n \geq 0$.