**Algebra e Geometria**
**Seconda prova parziale - 7 dicembre 2011**
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia $A$ la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determinare una base e la dimensione di row $A$.
   (b) Determinare una base e la dimensione di col $A$.
   (c) Determinare una base ORTOGONALE di $U=$ col $A$.
   (d) Determinare una base ORTOGONALE di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori trovati nel punto (c).

2. Sia $A$ la matrice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determinare gli autovalori di $A$.
   (b) Si dica se la matrice è diagonalizzabile.
   (c) Determinare, se possibile, una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

3. Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Si dia la definizione di insieme di vettori linearmente indipendente.
   (b) Sia $f$ un'applicazione lineare iniettiva da $V$ in $W$ ed $n > 1$ un intero. Si provi che se l'insieme $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ è linearmente indipendente allora anche l'insieme $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\} \subset W$ è linearmente indipendente.

**Svolgere su fogli a parte.**

4. Siano dati i numeri 123 e 54.

   (a) Determinare $MCD(123, 54)$ e due interi $x$ ed $y$ tali che
   $$MCD(123, 54) = 54x + 123y.$$

   (b) Risolvere la congruenza $54X \equiv 24 \mod 123$.

   (c) Dire quante soluzioni ha l'equazione $[54]X = [24]$ in $\mathbb{Z}/123\mathbb{Z}$.

5. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

   (a) Scrivere
   $$z = \frac{16-4i}{3-i} + (3-2i)\overline{(1+2i)}$$
   nella forma $a + ib$.

   (b) Sia $w = 4 - 4i$. Determinare $|w|$, $arg(w)$ e $w^4$.

   (c) Determinare tutti i numeri complessi $x$ tali che $x^5 = 32$.

6. Siano dati il punto $P(-1, -2, 0)$ ed il vettore $v = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Si determinino equazioni cartesiane della retta $r$ passante per $P$ e parallela a $v$;

   (b) Si dica se il punto $Q(1, 1, -9)$ appartiene alla retta $r$ e si determini la distanza minima del punto $Q$ dalla retta $r$.