Correzione esercizio sulla distanza punto-piano

di Giovanna Carnovale

Determinare la distanza minima del punto $P(0,1,2)$ dal piano π passante per $P_0(1,1,1)$ e parallelo ai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione (I metodo): Per prima cosa individuiamo un vettore normale al piano π calcolando una base di $\langle v_1, v_2\rangle^\perp$. Sappiamo che i vettori di $\langle v_1, v_2\rangle^\perp$ si ottengono risolvendo il sistema lineare

$$\begin{aligned} -x + 2z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned}$$

quindi risolvendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

le soluzioni sono date da

$$x = 2t, \quad , y = -4t, \quad z = t, \ \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Una base per questo speazio vettoriale è data dall'insieme il cui unico elemento è $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La retta r passante per P ed ortogonale a π interseca π nel punto Q di π, tale che il vettore $\overline{PQ}$ ha distanza minima da π.

Equazioni parametriche di r sono date da

$$\begin{aligned} x &= 2a \\ y &= 1-4a \\ z &= 2+a \end{aligned}$$

Equazioni parametriche di π sono date da

$$\begin{aligned} x &= 1-s+2t \\ y &= 1+t \\ z &= 1+2s \end{aligned}$$

Cerco $Q = r \cap \pi$ cercando le soluzioni del sistema nelle 3 incognite a, s, t

$$\begin{aligned} 2a &= 1-s+2t \\ 1-4a &= 1+t \\ 2+a &= 1+2s \end{aligned}$$

vale a dire

$$\begin{aligned} 2a+s-2t &= 1 \\ 4a+t &= 0 \\ a-2s &= -1 \end{aligned}$$

quindi risolvendo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 1/8 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 21/40 & -1/10 \end{array}\right]$$

le cui soluzioni sono: $t = -4/21$; $s = 11/21$ ed $a = 1/21$. Sostituendo il valore di a nell'equazione parametrica di r otteniamo le coordinate di Q. Le coordinate del vettore $\overline{PQ}$ si ottengono sottraendo le coordinate di P da quelle di

Q, vale a dire $\overline{PQ} = \begin{bmatrix} 2(1/21) \\ 1-4(1/21)-1 \\ 2+(1/21)-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/21 \\ -4/21 \\ 1/21 \end{bmatrix}$. La distanza minima è pertanto

$$\sqrt{\overline{PQ} \cdot \overline{PQ}} = (1/21)\sqrt{2^2+4^2+1} = 1/\sqrt{21}$$

II metodo: Calcoliamo la proiezione del vettore $\overline{PP_0}$ sul vettore v. Questo è il vettore $\overline{PQ}$, del quale possiamo calcolare la lunghezza.

$$\overline{PQ} = \mathrm{proj}_v(\overline{PP_0}) = \frac{\overline{PP_0} \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{[1\ 0\ -1]^T \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}}{[2\ -4\ 1]^T \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}} v = (1/21)v$$

poi si procede come sopra.