

Algebra e Geometria per Informatica
Secondo Appello
12 gennaio 2011
Tema B

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

RISOLVERE CIASCUN ESERCIZIO SU UNA PAGINA NUOVA

1. Consideriamo la funzione

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto z^3 + 2.$$

Dire, motivando la risposta, se f è iniettiva e se è suriettiva. Inoltre, dire quanti sono e scrivere nella forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, gli elementi dell'insieme

$$f^{-1}(3) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tali che } f(z) = 3\}.$$

2. Mostrare, utilizzando il principio di induzione, che

$$3^n \geq n + 1$$

per ogni numero naturale $n \geq 0$. (Nota: ricordare che $3^0 = 1$.)

3. Descrivere tutte le soluzioni intere della congruenza

$$32x \equiv -6 \pmod{54}.$$

Inoltre, dire quante sono ed elencare le soluzioni dell'equazione

$$[32][x] = [-6] \text{ in } \mathbb{Z}_{54}.$$

4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dire, motivando la risposta, se il vettore

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

è un autovettore di A . Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A . Per ogni autovalore, determinare una base del suo autospazio. Inoltre, mostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

5. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, Y_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcolare la dimensione di U .
- (b) Trovare una base ortogonale di U .

6. (a) Dire per quali valori di t la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1-t \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è invertibile.

- (b) Calcolare P^{-1} per $t = 0$.

7. Date le rette

$$r \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad s \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4x - y - z = 0 \end{cases}$$

- (a) dire se r ed s sono ortogonali;
- (b) scrivere un'equazione del piano π contenente s e parallelo ad r .

8. (a) Siano v_1, v_2, \dots, v_k vettori dello spazio vettoriale V , e sia $T : V \rightarrow W$ una funzione lineare. Si dimostri che se $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)$ sono linearmente indipendenti, allora anche v_1, v_2, \dots, v_k sono linearmente indipendenti.

- (b) Consideriamo la funzione lineare $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $T(X) = AX$, dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Si trovino due vettori linearmente indipendenti $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(X_1), T(X_2)$ siano linearmente dipendenti.