Algebra e Geometria per Informatica
Seconda Prova Parziale
10 dicembre 2010
Tema A

Nome e Cognome:

Matricola:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Determinare:
   (i) una base per il sottospazio row(A) di $\mathbb{R}^4$ generato dalle righe di A,
   (ii) una base per lo spazio nullo null(A) di A,
   (iii) una base per il sottospazio col(A) di $\mathbb{R}^4$ generato dalle colonne di A.

2. Consideriamo l'insieme
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tale che } x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$
Dimostrare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, calcolare una base per W e una base per il suo complemento ortogonale $W^\perp$.

3. Dimostrare che la funzione

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare.

4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire se 1 e -1 sono autovalori di A. Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. Per ogni autovalore, determinare una base del suo autospazio. Inoltre, mostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

5. Si completi la seguente definizione: "I vettori $X_1, \ldots, X_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se...".
Dire inoltre se i vettori $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti motivando la risposta.

6. Sia data la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Determinare equazioni parametriche di r. Dire se il punto P di coordinate $(3, 1, 0)$ appartiene alla retta r. Scrivere un'equazione cartesiana del piano π per P ortogonale ad r.

7. Sia dato il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Determinare una base ortogonale di U e la dimensione di U. Dire se il vettore $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ appartiene ad U.

8. Siano Y, $Z \in \mathbb{R}^n$ due vettori non nulli. È vero che se $Y \neq Z$ allora $\langle Y \rangle^\perp \neq \langle Z \rangle^\perp$? (dimostrazione o controesempio!)