Algebra e Geometria 2

Soluzioni della Prima prova parziale - 11 maggio 2007 - Tema A

1. Sia $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti complessi.

(a) Dimostrare che l'insieme delle matrici

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d, c = -b \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di V .

(b) Determinare una base e la dimensione di U .

(c) Completare la base trovata al punto precedente ad una base di V .

Svolgimento

(a) Dalla definizione si ottiene subito che

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in V \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

U non è vuoto: la matrice nulla gli appartiene. U è chiuso per la somma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \\ -(b_1 + b_2) & (a_1 + a_2) \end{pmatrix} \in U;$$

e per il prodotto per scalari: per ogni $k \in \mathbb{C}$

$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ -kb & ka \end{pmatrix} \in U.$$

Quindi U è sottospazio di V .

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sono in U e sono generatori; infatti ogni elemento di U è una loro combinazione lineare:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre non sono proporzionali, quindi sono linearmente indipendenti e allora sono una base di U . In particolare $\dim U = 2$.

(c) Poiche' $\dim V = 4$ e una base e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

completo la base di U ad una base di V aggiungendo 2 di queste matrici in modo da avere 4 matrici indipendenti. Scrivendo le matrici per colonna ottengo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ridotta a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo mostra che le colonne 1,2,3,5 della matrice di partenza sono indipendenti, e le matrici corrispondenti sono una base di V .

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare la dimensione e una base dello spazio generato dai vettori riga di A
- (b) Trovare la dimensione e una base dello spazio generato dai vettori colonna di A
- (c) Trovare la dimensione e una base dello spazio $\text{Ker}(A)$ delle soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Svolgimento

- (a) Riducendo a scala la matrice A si ottiene

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base dello spazio generato dai vettori riga di A e' formata dalle righe non nulle di A' ; la dimensione di questo spazio (che e' il rango di A) e' 2.

- (b) Una base dello spazio generato dai vettori colonna di A e' formata dalle colonne di A che corrispondono ai pivots di A' , cioe' dalle colonne 1 e 4 di A . La dimensione e' ancora 2.
- (c) Risolvendo il sistema equivalente $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si nota che sono dominanti le incognite x_1 e x_4 ; si pone $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_5 = t$ e si ottiene $x_4 = -\frac{t}{3}$, $x_1 = -2r - 3s - t$. Cosi' la soluzione generale e'

$$\begin{pmatrix} -2r - 3s - t \\ r \\ s \\ -\frac{t}{3} \\ t \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni fondamentali indicate sopra sono una base di $\text{Ker}(A)$ che ha dimensione 3.

3. (a) Determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Estrarre dall'insieme $\{A, B, C\}$ una base per il sottospazio $W = \text{Span}(A, B, C)$ al variare del parametro λ .
- (c) Dire come cambia la dimensione del sottospazio W generato da A, B, C al variare del parametro λ .
- (d) Sia $\lambda = 1$. Determinare le coordinate del vettore $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base ordinata $\{A, B, C\}$.

Svolgimento

- (a) Identifico $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$; le matrici A, B, C corrispondono rispettivamente ai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda - 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Studio quindi per quali valori di λ i vettori v_1, v_2, v_3 sono lin. indipendenti. Questo avviene quando la matrice G_λ che ha come colonne v_1, v_2, v_3 ha rango 3:

$$G_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \lambda \\ 1 & 3 & \lambda \\ -1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(potevo anche considerare la matrice di righe v_1^T, v_2^T, v_3^T). La forma a scala della matrice G_λ è

$$G'_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & (\lambda - 1)/3 \\ 0 & 0 & \lambda(4 - \lambda)/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 per $\lambda \neq 0, 4$.

Quindi le matrici A, B, C sono lin. indipendenti per $\lambda \neq 0, 4$.

- (b) Per $\lambda \neq 0, 4$ una base di W è A, B, C perché sono lin. indipendenti; per $\lambda = 0$ o 4 , una base di W contenuta nell'insieme $\{A, B, C\}$ è A, B (corrisponde alle colonne di G_λ relative ai pivots di G').
- (c) Dal punto precedente, so che per $\lambda \neq 0, 4$ la dimensione di W è 3, mentre per $\lambda = 0$ o 4 la dimensione è 2.
- (d) Se D appartiene a W , le sue coordinate nella base A, B, C sono le soluzioni del sistema

$$G_{1\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema si trova la soluzione $(1/3, 1/3, -1/3)^T$. Questo ci dice che D effettivamente appartiene a W e che le sue coordinate rispetto la base A, B, C sono $(1/3, 1/3, -1/3)^T$.

4. Date le due rette

$$r : \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$$

- (a) si dica se le rette r ed s sono complanari;
- (b) se possibile, scrivere una equazione cartesiana del piano contenente entrambe le rette.

Svolgimento

- (a) Il sistema

$$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + y = 2 \\ x - y + z + 1 = 0 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$$

ammette come soluzione unica il punto $P_0 = (-2, 4, 5)^T$, quindi le rette r e s si intersecano nel punto P_0 ed in particolare sono complanari.

- (b) Considero il fascio di piani passanti per r

$$\lambda(y - z + 1) + \mu(x + y - 2) = 0$$

e scelgo tra questi il piano che passa per un punto di s , ad esempio il punto $(0, 0, -1)$; e' il piano con $\lambda = \mu$ cioe' il piano $x + 2y - z - 1$.

5. Scrivere le equazioni parametriche della retta parallela ai due piani

$$y + 2x + z + 2 = 0, \quad x - y - 2z - 3 = 0$$

e passante per il punto $P = (1, 1, 1)$.

Svolgimento L'equazione parametrica di una generica retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e'

$$\begin{cases} x = lt + 1 \\ y = mt + 1 \\ z = nt + 1 \end{cases}$$

al variare dei parametri l, m, n . La retta cercata e' parallela ai due piani quindi i parametri l, m, n soddisfano le due equazioni (condizione di parallelismo tra retta e piano)

$$\begin{cases} 2l + m + n = 0 \\ l - m - 2n = 0; \end{cases}$$

il sistema ha soluzione $(1/3, -5/3, 1)$, quindi la retta ha equazione

$$\begin{cases} x = t/3 + 1 \\ y = -5t/3 + 1 \\ z = t + 1. \end{cases}$$

6. Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n$ una lista di suoi vettori.
- (a) Si completi la definizione: I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se ...
 - (b) Si dimostri che se sono linearmente dipendenti allora uno di questi si scrive come combinazione lineare degli altri.
 - (c) Si dimostri che se sono linearmente dipendenti, comunque scelto un vettore $v \in V$ allora la lista $v_1, \dots, v_n, v$ è ancora linearmente dipendente.

Svolgimento

- (a) I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se esistono scalari non tutti nulli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.
- (b) Supposto per esempio $\alpha_j \neq 0$ si ricava $v_j = \sum_{i \neq j} \frac{-\alpha_i}{\alpha_j} v_i$.
- (c) Se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ con gli α_i non tutti nulli, allora anche $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + 0v = 0$ con i coefficienti non tutti nulli.