

Algebra e Geometria per Informatica
Terzo Appello
24 marzo 2011

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

RISOLVERE CIASCUN ESERCIZIO SU UNA PAGINA NUOVA

1. Mostrare che

$$3^n - (-2)^n$$

è multiplo di 5 per ogni numero naturale $n \geq 1$.

2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A . Per ogni autovalore, determinare una base del suo autospazio. Inoltre, mostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

3. Date le rette

$$r \begin{cases} x = t \\ y = -2t - 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad s \begin{cases} 2x - 2y + 3z + 2 = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

- (a) dire se r ed s sono ortogonali;
(b) scrivere un'equazione del piano α contenente s e parallelo ad r ;
(c) scrivere un'equazione del piano β contenente r e ortogonale ad s .
4. Date due matrici quadrate 2×2 A e B , è sempre vero che $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$? Dare una breve dimostrazione o un controesempio.

5. Consideriamo la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3t-1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

dipendente dal parametro reale t . Dire per quali valori di t la matrice M è invertibile. Calcolare l'inversa di M per $t = 0$.

6. Indichiamo con U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dire se v_1 e v_2 sono ortogonali. Calcolare una base ortogonale di U . Calcolare una base per il complemento ortogonale $U^\perp$.

7. Consideriamo la congruenza

$$33x \equiv -9 \pmod{96}.$$

Dire se $x = 0$ è soluzione della congruenza. Descrivere tutte le soluzioni intere della congruenza. Elencare tutte le soluzioni comprese tra 0 e 95. Elencare le soluzioni dell'equazione

$$[33]x \equiv [-9] \quad \text{in } \mathbb{Z}_{96}.$$

8. Consideriamo il numero complesso

$$\alpha = -\frac{1+3i}{1+i} + i.$$

Scrivere α nella forma $a+ib$ con a e b in $\mathbb{R}$. Calcolare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = \alpha$. Dire se la funzione

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto z^2$$

è iniettiva e se è suriettiva.