Algebra e Geometria

Pimo Appello - 11 Dicembre 2012

Tema A

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.

   (b) Determinare una base ortogonale di V.

   (c) Determinare una base del complemento ortogonale di V.

2. Sia A_t la matrice

$$A_t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ t+1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

   (b) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

   (c) Per $t = 0$, si verifichi che i vettori $v_1 = [0, 1, 0]^T$, $v_2 = [1, 0, 1]^T$ e $v_3 = [-1, 0, 1]^T$ sono autovettori di A_0. Si trovi una matrice P tale che $P^{-1}A_0P$ sia diagonale.

3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W.

   (a) Si dimostri che se f è iniettiva allora $\ker(f) = \{0\}$.

   (b) Si dimostri che se $\ker(f) = \{0\}$ allora f é iniettiva.

4. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

   (a) Sia $w = 2 - 2i$. Determinare la forma polare di w.

   (b) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^2 = w$.

5. Siano dato il punto $P(1, -2, 0)$, ed il vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (a) Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per il punto P e parallela a v.

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r.

   (c) Si determini il piano π passante per l'origine ed ortogonale alla retta r.

Svolgere su fogli a parte

6. Si dimostri per induzione che se $n \geq 1$ si ha $3^n \geq 2n + 1$.
7. Sia data la congruenza lineare

$$66X \equiv 15 \bmod 576.$$

   Si dica se essa ammette soluzioni ed in caso affermativo, trovare tutte le soluzioni intere.

Algebra e Geometria
Pimo Appello - 11 Dicembre 2012

Tema B
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.
   (b) Determinare una base ortogonale di V.
   (c) Determinare una base del complemento ortogonale di V.

2. Sia A_t la matrice
$$A_t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ t-1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
   (b) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.
   (c) Per $t = 2$, si verifichi che i vettori $v_1 = [0, 1, 0]^T$, $v_2 = [1, 0, 1]^T$ e $v_3 = [-1, 0, 1]^T$ sono autovettori di A_2. Si trovi una matrice P tale che $P^{-1}A_2P$ sia diagonale.

3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W.

   (a) Si dimostri che se f è iniettiva allora $\ker(f) = \{0\}$.
   (b) Si dimostri che se $\ker(f) = \{0\}$ allora f é iniettiva.

4. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

   (a) Sia $w = 3 + 3i$. Determinare la forma polare di w.
   (b) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^3 = w$.

5. Siano dato il punto $P(1, 0, -2)$, ed il vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (a) Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per il punto P e parallela a v.
   (b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r.
   (c) Si determini il piano π passante per l'origine ed ortogonale alla retta r.

Svolgere su fogli a parte

6. Si dimostri per induzione che se $n \geq 1$ si ha $4^n \geq 3n + 1$.
7. Sia data la congruenza lineare

$$88X \equiv 15 \bmod 768.$$

Si dica se essa ammette soluzioni ed in caso affermativo, trovare tutte le soluzioni intere.

Algebra e Geometria

Pimo Appello - 11 Dicembre 2012

Tema C

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.

   (b) Determinare una base ortogonale di V.

   (c) Determinare una base del complemento ortogonale di V.

2. Sia A_t la matrice

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t+2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

   (b) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

   (c) Per $t = -1$, si verifichi che i vettori $v_1 = [0,1,0]^T$, $v_2 = [1,0,1]^T$ e $v_3 = [-1,0,1]^T$ sono autovettori di A_{-1}. Si trovi una matrice P tale che $P^{-1}A_{-1}P$ sia diagonale.

3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W.

   (a) Si dimostri che se f è iniettiva allora $\ker(f) = \{0\}$.

   (b) Si dimostri che se $\ker(f) = \{0\}$ allora f é iniettiva.

4. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

   (a) Sia $w = 2 + 2i$. Determinare la forma polare di w.

   (b) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^4 = w$.

5. Siano dato il punto $P(0,1,-2)$, ed il vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (a) Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per il punto P e parallela a v.

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r.

   (c) Si determini il piano π passante per l'origine ed ortogonale alla retta r.

Svolgere su fogli a parte

6. Si dimostri per induzione che se $n \geq 1$ si ha $5^n \geq 2n + 3$.
7. Sia data la congruenza lineare

$$44X \equiv 15 \bmod 384.$$

   Si dica se essa ammette soluzioni ed in caso affermativo, trovare tutte le soluzioni intere.

Algebra e Geometria
Pimo Appello - 11 Dicembre 2012

Tema D
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.
   (b) Determinare una base ortogonale di V.
   (c) Determinare una base del complemento ortogonale di V.

2. Sia A_t la matrice

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t+1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
   (b) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.
   (c) Per $t = 0$, si verifichi che i vettori $v_1 = [0, 1, 0]^T$, $v_2 = [1, 0, 1]^T$ e $v_3 = [-1, 0, 1]^T$ sono autovettori di A_0. Si trovi una matrice P tale che $P^{-1}A_0P$ sia diagonale.

3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W.

   (a) Si dimostri che se f è iniettiva allora $\ker(f) = \{0\}$.
   (b) Si dimostri che se $\ker(f) = \{0\}$ allora f é iniettiva.

4. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

   (a) Sia $w = 1 + i$. Determinare la forma polare di w.
   (b) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^3 = w$.

5. Siano dato il punto $P(-2, 1, 0)$, ed il vettore $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (a) Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per il punto P e parallela a v.
   (b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r.
   (c) Si determini il piano π passante per l'origine ed ortogonale alla retta r.

Svolgere su fogli a parte

6. Si dimostri per induzione che se $n \geq 1$ si ha $3^n \geq n + 2$.
7. Sia data la congruenza lineare

$$77X \equiv 15 \bmod 672.$$

   Si dica se essa ammette soluzioni ed in caso affermativo, trovare tutte le soluzioni intere.