Algebra e Geometria

Quinto Appello - 13 Settembre 2013

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3, v_4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.

   (b) Determinare una base ortogonale di V.

   (c) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori trovati nel punto (b).

2. Sia A_t la matrice

$$A_t = \begin{bmatrix} 2 & t^2 & 1-t \\ t & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

   (b) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

   (c) Per $t = 1$, si verifichi che i vettori $v_1 = [1, 1, 0]^T$, $v_2 = [1, -1, 0]^T$ e $v_3 = [0, 0, 1]^T$ sono autovettori di A_0. Si trovi una matrice P tale che $P^{-1}A_0P$ sia diagonale.

3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W.

   (a) Si dimostri che se f è iniettiva allora $\ker(f) = \{0\}$.

   (b) Si dimostri che se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti ed f è iniettiva, allora $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

4. Si provi che se il prodotto $M = ABC$ di tre matrici quadrate è invertibile, allora A, B e C sono invertibili.

5. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

   (a) Sia $w = 1 + i$. Determinare la forma polare di w.

   (b) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^5 = w$.

   (c) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(x) = x^5 - w$. Si dica se la funzione é iniettiva o suriettiva.

6. Siano dato il punto $P(1, 2, 0)$, ed il vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (a) Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per il punto P e parallela a v.

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r.

   (c) Si determini il piano π passante per l'origine ed ortogonale alla retta r.

Svolgere su fogli a parte

7. Sia dato il sistema di congruenze:

$$\begin{aligned} 7X &\equiv 14 \bmod 35 \\ 26X &\equiv 13 \bmod 39 \\ 15X &\equiv 15 \bmod 30 \end{aligned}$$

   Dire se il sistema ammette soluzioni e, in caso affermativo, determinare tutte le soluzioni del sistema.

8. Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$