Algebra e Geometria
Quarto Appello, 2 Luglio 2013

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia $V \leq \mathbb{R}^4$ l'insieme definito come

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.
   (b) Determinare una base ortogonale di V.
   (c) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente la base trovata nel punto precedente.

2. Al variare di $s \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice A_s

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & s^2 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 1-s & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Stabilire per quali valori di s la matrice A_s è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
   (b) Per $s = 1$ determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_1P$ sia diagonale.
   (c) Stabilire per quali valori di s la matrice A_s è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori si determini una matrice ortogonale Q tale che $Q^T A_s Q$ sia diagonale.

3. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali. Si consideri l'insieme

$$\mathrm{nullA} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{AX} = 0\}.$$

   Si dimostri che

   (a) null A è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$;
   (b) se U è un'altra matrice $n \times n$ risulta null $A \subseteq$ null UA;
   (c) se U è invertibile allora null $A =$ null UA.

4. Sia A una matrice $n \times n$ e siano v_1 e v_2 autovettori associati ad autovalori distinti di A. Provare che:

   (a) l'insieme $\{v_1, v_2\}$ è linearmente indipendente;
   (b) $v_1 + v_2$ non è autovettore di A.

5. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

   (a) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^4 = 1 + i$.
   (b) Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^4 - 1 - i \end{aligned}$$

   Dire se f è iniettiva e suriettiva motivando la risposta.

6. Siano dati il punto $P(1,0,0)$ ed il vettore $v = [-1,2,0]^T$.

   (a) Si determinino equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P e parallela al vettore v.

   (b) Si determini la distanza del punto $Q(2,3,0)$ dalla retta r.

   (c) Si determinino equazioni del piano π passante per il punto Q e la retta r.

Svolgere su fogli a parte.

7. Sia dato il sistema di congruenze:

$$\begin{aligned} 10X &\equiv 20 \bmod 50 \\ 30X &\equiv 15 \bmod 45 \\ 22X &\equiv 22 \bmod 44 \end{aligned}$$

   Dire se il sistema ammette soluzioni e, in caso affermativo, determinare tutte le soluzioni del sistema.

8. Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$