

Algebra e Geometria
Terzo Appello, 26 Marzo 2013

Tema A

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ l'insieme definito come

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

- (a) Si provi che V è sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 .
 - (b) Determinare la dimensione e una base di V .
 - (c) Determinare una base ortogonale di V .
2. Al variare di $s \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice A_s

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ s & 1 & 1+s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Stabilire per quali valori di s la matrice A_s è diagonalizzabile in \mathbb{R} .
 - (b) Per $s = -1$ determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_{-1}P$ sia diagonale.
 - (c) Stabilire per quali valori di s la matrice A_s è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori si determini una matrice ortogonale Q tale che $Q^T A_s Q$ sia diagonale.
3. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$f_\alpha([x, y, z]^T) = [x + \alpha y, \alpha y z]^T$$

al variare del parametro reale α .

- (a) Si dica quali condizioni deve soddisfare la funzione f_α per essere lineare.
 - (b) Si dica per quali valori reali di α la funzione f_α è lineare.
 - (c) Si dica se per i valori del punto precedente la funzione f_α è iniettiva e/o suriettiva.
4. Siano v_1, v_2 vettori di \mathbb{R}^n . Si provi che se v_1, v_2 sono non-nulli e ortogonali tra loro, allora sono linearmente indipendenti. Cosa succede invece se uno di loro è il vettore nullo?
5. Sia \mathbb{C} il campo dei numeri complessi.

- (a) Scrivere

$$z = \frac{3+i}{1+i} - 1$$

nella forma $a + ib$.

- (b) Determinare $|z|$, $\arg(z)$ e z^5 .
- (c) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^5 = z^5$.

6. Siano dati il punto $P(0, 1, 0)$ e i vettori $v = [2, -1, 0]^T$ e $w = [0, 1, 1]^T$.
- (a) Si determinino equazioni parametriche del piano π passante per il punto P e parallelo ai vettori v e w .
 - (b) Si determinino equazioni cartesiane del piano π .
 - (c) Si determini la distanza del punto $Q(0, 7, 0)$ dal piano π .

Svolgere su fogli a parte.

7. Sia dato il sistema di congruenze:

$$\begin{aligned}45X &\equiv 75 \pmod{30} \\14X &\equiv 42 \pmod{35} \\14X &\equiv 7 \pmod{21}\end{aligned}$$

Dire se il sistema ammette soluzioni e, in caso affermativo, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.

8. Dimostrare per induzione su n che $3^n \geq 2n + 3$ per $n \geq 2$.