Algebra e Geometria
Prima prova parziale - 29 Ottobre 2012
Tema A

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ a coefficienti reali. Si provi che se $rank(A) < n$ allora A ha un autovalore uguale a 0.

2. Una matrice $D = [d_{i,j}]_{i,j} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice diagonale se $d_{i,j} = 0$ per $i \neq j$ (le componenti al di fuori della diagonale principale sono nulle). Siano A e B due matrici $n \times n$ diagonali.
   (a) Si provi che la matrice prodotto AB è diagonale.
   (b) Si provi che $AB = BA$.
   (c) È vero che $AC = CA$ per ogni matrice quadrata $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$?

3. Data la matrice

$$M_t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

   (a) si calcoli il determinante di M_t;
   (b) si stabilisca per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice M_t risulta invertibile;
   (c) si calcoli l'inversa di M_1 per $t = 1$;
   (d) si calcoli la soluzione del sistema lineare $M_1 X = [1, 1, 1]^T$.

4. Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +tx_3 & = t+1 \\ & -x_2 & +2x_3 & = -2 \\ 2x_1 & +4x_2 & +t^2x_3 & = t^2+t \end{cases}$$

   (a) Si descriva il rango delle matrici incompleta e completa e il numero delle soluzioni del sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Si calcolino tutte le soluzioni del sistema per $t = 2$.

5. Sia data l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^3 \end{aligned}$$

   (a) Scrivere in forma $a + ib$ ed in forma polare il numero complesso $\frac{2(2-i)}{1+i} + 4i$.
   (b) Trovare tutte le radici terze del numero $1 + i$.
   (c) Dire se f è iniettiva, suriettiva, biettiva, motivando la risposta.

6. Dimostrare per induzione che se $n \geq 1$ allora $(n + 2)^2 \geq 7n + 2$.