

**Algebra e Geometria**  
**Prima prova parziale - 29 Ottobre 2012**  
**Tema B**

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Una matrice  $D = [d_{i,j}]_{i,j} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  si dice diagonale se  $d_{i,j} = 0$  per  $i \neq j$  (le componenti al di fuori della diagonale principale sono nulle). Siano  $A$  e  $B$  due matrici  $n \times n$  diagonali.
  - (a) Si provi che la matrice prodotto  $AB$  è diagonale.
  - (b) Si provi che  $AB = BA$ .
  - (c) È vero che  $AC = CA$  per ogni matrice quadrata  $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ?
2. Sia  $A$  una matrice quadrata  $n \times n$  a coefficienti reali. Si provi che se  $\text{rank}(A) < n$  allora  $A$  ha un autovalore uguale a 0.
3. Data la matrice

$$B_s = \begin{bmatrix} 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) si calcoli il determinante di  $B_s$ ;
  - (b) si stabilisca per quali valori del parametro  $s \in \mathbb{R}$  la matrice  $B_s$  risulta invertibile;
  - (c) si calcoli l'inversa di  $B_1$  per  $s = 1$ ;
  - (d) si calcoli la soluzione del sistema lineare  $B_1 X = [1, 1, 1]^T$ .
4. Sia dato il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +tx_3 & = t \\ & -x_2 & +2x_3 & = -2 \\ 2x_1 & +4x_2 & +t^2x_3 & = t^2 + t \end{cases}$$
  - (a) Si descriva il rango delle matrici incompleta e completa e il numero delle soluzioni del sistema al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .
  - (b) Si calcolino tutte le soluzioni del sistema per  $t = 0$ .
5. Sia data l'applicazione
$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^3$$
  - (a) Scrivere in forma  $a + ib$  ed in forma polare il numero complesso  $\frac{2(2+i)}{1-i} - 4i$ .
  - (b) Trovare tutte le radici terze del numero  $1 - i$ .
  - (c) Dire se  $f$  è iniettiva, suriettiva, biettiva, motivando la risposta.
6. Dimostrare per induzione che se  $n \geq 1$  allora  $(n + 3)^2 \geq 9n + 2$ .