**Algebra e Geometria**
**Prima prova parziale - 29 Ottobre 2012**
**Tema D**

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} & -x_2 & +2x_3 & = -2 \\ x_1 & +2x_2 & +2sx_3 & = 2s+1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4s^2x_3 & = 4s^2+2s \end{cases}$$

   (a) Si descriva il rango delle matrici incompleta e completa e il numero delle soluzioni del sistema al variare di $s \in \mathbb{R}$.

   (b) Si calcolino tutte le soluzioni del sistema per $s = 1$.

2. Data la matrice

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2s \\ 1 & 2s & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) si calcoli il determinante di $B_s$;

   (b) si stabilisca per quali valori del parametro $s \in \mathbb{R}$ la matrice $B_s$ risulta invertibile;

   (c) si calcoli l'inversa di $B_{1/2}$ per $s = 1/2$;

   (d) si calcoli la soluzione del sistema lineare $B_{1/2}X = [1, 1, 1]^T$.

3. Una matrice $D = [d_{i,j}]_{i,j} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice diagonale se $d_{i,j} = 0$ per $i \neq j$ (le componenti al di fuori della diagonale principale sono nulle). Siano $A$ e $B$ due matrici $n \times n$ diagonali.

   (a) Si provi che la matrice prodotto $AB$ è diagonale.

   (b) Si provi che $AB = BA$.

   (c) È vero che $AC = CA$ per ogni matrice quadrata $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$?

4. Sia $A$ una matrice quadrata $n \times n$ a coefficienti reali. Si provi che se $rank(A) < n$ allora $A$ ha un autovalore uguale a 0.

5. Sia data l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^5 \end{aligned}$$

   (a) Scrivere in forma $a + ib$ ed in forma polare il numero complesso $\frac{2(2-i)}{1+i} + 4i$.

   (b) Trovare tutte le radici quinte del numero $1 + i$.

   (c) Dire se $f$ è iniettiva, suriettiva, biettiva, motivando la risposta.

6. Dimostrare per induzione che se $n \geq 1$ allora $(n + 5)^2 \geq 11n + 2$.