Algebra e Geometria
Seconda prova parziale - 3 Dicembre 2012

Tema A
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.
   (b) Determinare una base ortogonale di V.
   (c) Determinare una base del complemento ortogonale di V.
   (d) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori trovati nel punto (b).

2. Sia A_t la matrice
$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di t dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
   (b) Al variare di t dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.
   (c) Per $t = 0$ trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_0P$ sia diagonale.

3. Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 e sia $\text{proj}_U : \mathbb{R}^4 \to U$ la funzione che associa ad ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ la sua proiezione su U. Si dimostri che è lineare. Si dica se la funzione è iniettiva e se è suriettiva.

Svolgere su fogli a parte

4. Siano dati i punti $P = (2, -1, 0)$ e $Q = (1, 1, 1)$.
   (a) Si determinino equazioni cartesiane della retta r passante per P e Q.
   (b) Si determini la distanza del punto $A = (1, 0, 0)$ dalla retta r.

5. (a) Sia data la congruenza lineare $46X \equiv 23 \bmod 115$. Si dica se essa ammette soluzioni ed in caso affermativo, se ne trovino tutte le soluzioni intere.
   (b) Si dica se il sistema di congruenze
$$\begin{aligned} 46X &\equiv 23 \bmod 115 \\ 65X &\equiv 35 \bmod 10 \end{aligned}$$
   ammette soluzioni ed in caso affermativo, se ne determinino tutte le soluzioni intere.

Algebra e Geometria
Seconda prova parziale - 3 Dicembre 2012

Tema B
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.
   (b) Determinare una base ortogonale di V.
   (c) Determinare una base del complemento ortogonale di V.
   (d) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori trovati nel punto (b).

2. Sia B_t la matrice
$$B_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di t dire se B_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
   (b) Al variare di t dire se B_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.
   (c) Per $t = 0$ trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}B_0P$ sia diagonale.

3. Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 e sia $\mathrm{proj}_U : \mathbb{R}^4 \to U$ la funzione che associa ad ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ la sua proiezione su U. Si dimostri che è lineare. Si dica se la funzione è iniettiva e se è suriettiva.

Svolgere su fogli a parte

4. Siano dati i punti $P = (0, 2, -1)$ e $Q = (1, 1, 1)$.
   (a) Si determinino equazioni cartesiane della retta r passante per P e Q.
   (b) Si determini la distanza del punto $B = (0, 1, 0)$ dalla retta r.

5. (a) Sia data la congruenza lineare $50X \equiv 25 \mathrm{mod}\ 125$. Si dica se essa ammette soluzioni ed in caso affermativo, se ne trovino tutte le soluzioni intere.
   (b) Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{aligned} 50X &\equiv 25 \text{ mod } 125 \\ 75X &\equiv 65 \text{ mod } 10 \end{aligned}$$

   ammette soluzioni ed in caso affermativo, se ne determinino tutte le soluzioni intere.

Algebra e Geometria
Seconda prova parziale - 3 Dicembre 2012

Tema C
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.
   (b) Determinare una base ortogonale di V.
   (c) Determinare una base del complemento ortogonale di V.
   (d) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori trovati nel punto (b).

2. Sia C_t la matrice
$$C_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di t dire se C_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
   (b) Al variare di t dire se C_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.
   (c) Per $t = 0$ trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}C_0P$ sia diagonale.

3. Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 e sia $\mathrm{proj}_U : \mathbb{R}^4 \to U$ la funzione che associa ad ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ la sua proiezione su U. Si dimostri che è lineare. Si dica se la funzione è iniettiva e se è suriettiva.

Svolgere su fogli a parte

4. Siano dati i punti $P = (2, 0, -1)$ e $Q = (1, 1, 1)$.

   (a) Si determinino equazioni cartesiane della retta r passante per P e Q.
   (b) Si determini la distanza del punto $C = (1, 0, 0)$ dalla retta r.

5. (a) Sia data la congruenza lineare $54X \equiv 27 \bmod 135$. Si dica se essa ammette soluzioni ed in caso affermativo, se ne trovino tutte le soluzioni intere.
   (b) Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{aligned} 54X &\equiv 27 \bmod 135 \\ 85X &\equiv 25 \bmod 10 \end{aligned}$$

   ammette soluzioni ed in caso affermativo, se ne determinino tutte le soluzioni intere.

Algebra e Geometria
Seconda prova parziale - 3 Dicembre 2012

Tema D
Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare la dimensione e una base di V.

   (b) Determinare una base ortogonale di V.

   (c) Determinare una base del complemento ortogonale di V.

   (d) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori trovati nel punto (b).

2. Sia A_t la matrice

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Al variare di t dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

   (b) Al variare di t dire se A_t è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

   (c) Per $t = 0$ trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_0P$ sia diagonale.

3. Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 e sia $\mathrm{proj}_U : \mathbb{R}^4 \to U$ la funzione che associa ad ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ la sua proiezione su U. Si dimostri che è lineare. Si dica se la funzione è iniettiva e se è suriettiva.

Svolgere su fogli a parte

4. Siano dati i punti $P = (-1, 2, 0)$ e $Q = (1, 1, 1)$.

   (a) Si determinino equazioni cartesiane della retta r passante per P e Q.

   (b) Si determini la distanza del punto $D = (0, 1, 0)$ dalla retta r.

5. (a) Sia data la congruenza lineare $42X \equiv 21 \bmod 105$. Si dica se essa ammette soluzioni ed in caso affermativo, se ne trovino tutte le soluzioni intere.

   (b) Si dica se il sistema di congruenze

$$\begin{aligned} 42X &\equiv 21 \bmod 105 \\ 35X &\equiv 85 \bmod 10 \end{aligned}$$

   ammette soluzioni ed in caso affermativo, se ne determinino tutte le soluzioni intere.